5. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“
Musterlösung

WiSe 2015/16 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 5.1
Sei G eine Gruppe und seien $A, B \leq G$ Untergruppen von G mit $[G : B] < \infty$. Zeige:

a) Gilt $A \subseteq B$ und $[B : A] < \infty$, so gilt $[G : A] = [G : B] \cdot [B : A]$.

b) Gilt $[G : A] < \infty$, so gilt $[G : (A \cap B)] \leq [G : A] \cdot [G : B]$.

Lösung:

a) Sei $[G : B] = n$ und $[B : A] = m$. Seien weiter $X_{G,B} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von B in G und $X_{B,A} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von A in B.
Behauptung: Die Menge $X_{G,A} = \{g_i b_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von A in G.
Beweis: Sei $g \in G$ beliebig. Zu zeigen: Es gibt i, j mit $g \in g_i b_j A$.
Da $X_{G,B}$ die Menge G/B repräsentiert, existiert ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $g \in g_i B$, also $g_i^{-1} g \in B$. Da $X_{B,A}$ wiederum B/A repräsentiert, gibt es ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $g_i^{-1} g \in b_j A$, d.h. $g \in g_i b_j A$.
Wir müssen noch zeigen, dass jede Linksnebenklasse von A in G durch genau ein Element aus $X_{G,A}$ repräsentiert wird. Seien also $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ und $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, m\}$ mit $g_{i_1} b_{j_1} A = g_{i_1} b_{j_1} A$.
Zu zeigen: $i_1 = i_2$ und $j_1 = j_2$
Es gilt $(g_{i_1} b_{j_1})^{-1} g_{i_2} b_{j_2} \in A \subseteq B$ und somit wegen $b_{j_1}, b_{j_2} \in B$:

$$g_{i_1} B = g_{i_1} b_{j_1} B = g_{i_2} b_{j_2} B = g_{i_2} B$$

Da $X_{G,B}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für G/B ist, folgt daher $i_1 = i_2$.
Durch Multiplikation von links mit $g_{i_1}^{-1} = g_{i_2}^{-1}$ erhalten wir $b_{j_1} A = b_{j_2} A$. $X_{B,A}$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem für B/A und wir erhalten wiederum $j_1 = j_2$.
Somit ist $X_{G,A}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von A in G.

Insbesondere gilt: $g_{i_1} b_{j_1} = g_{i_2} b_{j_2}$ impliziert $i_1 = i_2$ und $j_1 = j_2$.
Daraus folgt $\# X_{G,A} = nm$ und wir erhalten schließlich:

$$[G : A] = \# G/A = \# X_{G,A} = nm = [G : B] \cdot [B : A]$$

b) Wir zeigen zunächst, dass $[A : (A \cap B)] \leq [G : B]$ gilt.
Betrachte dafür die Abbildung $\alpha : A/(A \cap B) \to G/B, a(A \cap B) \mapsto aB$.

α ist wohldefiniert. Denn für $a, a' \in A$ mit $a(A \cap B) = a'(A \cap B)$ gilt $a^{-1}a \in A \cap B \subseteq B$, also $aB = a'B$.
Seien nun $a, a' \in A$ mit $aB = a'B$. Dies heißt aber $a^{-1}a' \in B$, also $a^{-1}a' \in A \cap B$ und somit $a(A \cap B) = a'(A \cap B)$. Dies zeigt, dass α injektiv ist. Damit gilt:

$$[A : (A \cap B)] = \#A/(A \cap B) \leq \#G/B = [G : B]$$

Insbesondere ist $[A : (A : B)] < \infty$. Nach Teil a) gilt nun:

$$[G : (A \cap B)] = [G : A] \cdot [A : (A \cap B)] \leq [G : A] \cdot [G : B]$$

Aufgabe 5.2
Beweise die folgenden beiden Isomorphien:

a) $\langle x, y \mid x^{-1}yx^{-2} \rangle \cong \mathbb{Z}$

b) $\langle a, b \mid a^5, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

Lösung:

a) Zunächst zeigen wir, dass die Gruppe $G_1 := \langle x, y \mid x^{-1}yx^{-2} \rangle$ zyklisch ist. Aus der Relation $x^{-1}yx^{-2} = 1$ folgt durch Multiplikation mit x von links und mit x^2 von rechts $y = x^3$. Damit liegt y in der von x erzeugten Untergruppe und x erzeugt schon die gesamte Gruppe G_1.
Betrachte nun die Abbildung $f : \{x, y\} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $x \mapsto 1, y \mapsto 3$. Wegen $-f(x) + f(y) - 2f(y) = -1 + 3 - 2 = 0$ liegt $x^{-1}yx^{-2}$ im Kern der induzierten Abbildung $\tilde{f} : F(x, y) \to \mathbb{Z}$.
Nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $G_1 = \langle x, y \mid x^{-1}yx^{-2} \rangle$ existiert damit ein induzierter Homomorphismus $f : G_1 \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 3$. Insbesondere ist f surjektiv und G_1 damit unendlich.
Da G_1 eine unendliche zyklische Gruppe ist, gilt $G_1 \cong \mathbb{Z}$.

b) Nach Aufgabe 4.4 b) ist die Gruppe $G_2 := \langle a, b \mid a^5, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ isomorph zu dem direkten Produkt $\langle a \mid a^5 \rangle \times \langle b \mid b^3 \rangle$.
Behauptung: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\langle x \mid x^k \rangle \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.
Die Abbildung $\alpha : x \mapsto 1 + k\mathbb{Z}$ definiert einen Homomorphismus $F(\alpha) : F(\{x\}) \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Offenbar gilt $x^k \in \ker(F(\alpha))$. Nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $\langle x \mid x^k \rangle$ existiert daher ein Homomorphismus $\varphi : \langle x \mid x^k \rangle \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ mit $\varphi(x) = F(\alpha)(x) = 1 + k\mathbb{Z}$.
Umgekehrt definiert die Zuordnung $m \mapsto x^m$ einen Homomorphismus $\tilde{\psi} : \mathbb{Z} \to \langle x \mid x^k \rangle$. Da nach Definition von $\langle x \mid x^k \rangle$ die Untergruppe $k\mathbb{Z}$ im Kern von $\tilde{\psi}$ enthalten ist, liefert der Homomorphiesatz einen Homomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \langle x \mid x^k \rangle$ mit $\psi(1 + k\mathbb{Z}) = \tilde{\psi}(1) = x$.
Da φ und ψ die Erzeuger x und $1 + k\mathbb{Z}$ der Gruppen $\langle x \mid x^k \rangle$ und $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ aufeinander abbilden, sind φ und ψ zueinander inverse Isomorphismen.
Es gilt also $\langle x \mid x^k \rangle \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.
Somit erhalten wir:

$$G_2 \cong \langle a \mid a^5 \rangle \times \langle b \mid b^3 \rangle \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

Da das Element $(1 + 5\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z})$ Ordnung $15 = \#(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ hat, ist $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ zyklisch und es gilt $G_2 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5.3
Sei G eine Gruppe. Beweise, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) G ist residuell endlich.

ii) Zu jedem $g \in G \setminus \{1\}$ existiert ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $g \notin N$ und $[G : N] < \infty$.

iii) G ist isomorph zu einer Untergruppe eines Produkts von endlichen Gruppen.

Lösung:

„i) ⇒ ii)“ Sei G residuell endlich und sei $g \in G \setminus \{1\}$. Wegen der residuellen Endlichkeit existiert eine endliche Gruppe H und ein Homomorphimus $f : G \to H$ mit $f(g) \neq 1$. Setze $N := \ker(f)$.
Als Kern eines Gruppenhomorphismus ist N ein Normalteiler in G. Weiter gilt nach Konstruktion $g \notin N$.
Schließlich ist nach dem Homomorphiesatz G/N isomorph zur Untergruppe $\operatorname{im}(f) \leq H$ der endlichen Gruppe H. Insbesondere ist G/N endlich, d.h. $[G : N] = \#(G/N) < \infty$.

„ii) ⇒ iii)“ Wir nehmen nun an, dass für jedes $g \in G \setminus \{1\}$ ein Normalteiler $N^{(g)} \trianglelefteq G$ existiert mit $g \notin N^{(g)}$ und $[G : N^{(g)}] < \infty$.
Betrachte nun die Gruppe $H = \prod_{g \in G \setminus \{1\}} G/N^{(g)}$.
Da jedes $N^{(g)}$ endlichen Index in G hat, ist H ein Produkt von endlichen Gruppen. Desweiteren induzieren die kanonischen Projektionen $G \to G/N^{(g)}$ für $g \in G \setminus \{1\}$ nach der universellen Eigenschaft des direkten Produkts einen Homomorphismus $\iota : G \to H, \iota(g) = (gN^{(g')})_{g' \in G \setminus \{1\}}$.
Wir zeigen, dass ι injektiv ist. Ist $g \in G \setminus \{1\}$ beliebig, so gilt $g \notin N^{(g)}$ und $gN^{(g)} \neq N = 1_{G/N^{(g)}}$. Daraus folgt

$$\iota(g) = (gN^{(g')})_{g' \in G \setminus \{1\}} \neq (1_{G/N^{(g')}})_{g' \in G \setminus \{1\}} = 1_H$$

und somit $g \notin \ker(\iota)$. Wegen $\ker(\iota) = \{1\}$ ist ι injektiv.
ι definiert einen Isomorphismus von G auf das Bild $\operatorname{im}(\iota)$ und G ist somit isomorph zu einer Untergruppe von H, also isomorph zu einer Untergruppe eines Produkts von endlichen Gruppen.

„iii) ⇒ i)“ Sei G isomorph zu einer Untergruppe $G' \leq \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ für eine Familie $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ von endlichen Gruppen. Sei $\varphi : G \to G'$ ein Isomorphismus.
Für $\beta \in I$ sei π_β die Projektion $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha \to G_\beta, (g_\alpha)_{\alpha \in I} \mapsto g_\beta$.
Sei $g \in G \setminus \{1\}$ beliebig. Sei $\varphi(g) = (g_\alpha)_{\alpha \in I}$. Da φ injektiv ist, existiert $\beta \in I$ mit $g_\beta \neq 1$. Setze $f := \pi_\beta \circ \varphi$.
Dann ist f ein Homomorphismus von G in die endliche Gruppe G_β mit

$$f(g) = (\pi_\beta \circ \varphi)(g) = \pi_\beta((g_\alpha)_{\alpha \in I}) = g_\beta \neq 1.$$

Da $g \in G \setminus \{1\}$ beliebig war, ist G nach Definition residuell endlich.

Aufgabe 5.4
Sei G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Zeige:

a) Ist G residuell endlich, so ist auch H residuell endlich.

b) Ist G_i residuell endlich für jedes $i \in I$, so ist auch das direkte Produkt $\prod_{i\in I} G_i$ residuell endlich.

Lösung:

a) Sei G residuell endlich. Sei $h \in H \setminus \{1\}$ beliebig.
Da G residuell endlich ist, existiert eine endliche Gruppe K und ein Homomorphismus $f : G \to K$ mit $f(h) \neq 1$. Dann ist aber $f|_H : H \to K$ ein Homomorphismus von H in die endliche Gruppe K mit $f|_H(h) = f(h) \neq 1$.
Da $h \in H \setminus \{1\}$ beliebig war, ist H nach Definition residuell endlich.
Alternativ: Nach der äquivalenten Bedingung iii) aus Aufgabe 5.3 ist G isomorph zu einer Untergruppe G' eines Produkts von endlichen Gruppen. Sei $\varphi : G \to G'$ ein Isomorphismus. Dann ist die Einschränkung $\varphi|_H : H \to \varphi(H)$ ein Isomorphismus und $\varphi(H)$ ist als Untergruppe von G' ebenfalls eine Untergruppe eines Produkts von endlichen Gruppen. Nach Aufgabe 5.3 ist H daher residuell endlich.

b) Sei G_i residuell endlich für jedes $i \in I$. Sei $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \setminus \{1\}$ beliebig. Wegen $x \neq 1$ gibt es ein $j \in I$ mit $x_j \neq 1$. Da G_j residuell endlich ist, existiert eine endliche Gruppe K und ein Homomorphismus $f : G_j \to K$ mit $f(x_j) \neq 1$.
Setze $f' = f \circ \pi_j$, wobei π_j die Projektion $\prod_{i\in I} G_i \to G_j, (y_i)_{i\in I} \mapsto y_j$ sei. Dann ist f' ein Homomorphismus von $\prod_{i\in I} G_i$ in die endliche Gruppe K mit
$$f'(x) = f(\pi_j((x_i)_{i\in I})) = f(x_j) \neq 1.$$
Da $x \in \prod_{i\in I} G_i \setminus \{1\}$ beliebig war, ist $\prod_{i\in I} G_i$ nach Definition residuell endlich.

***-Aufgabe**
Sei G eine Gruppe und $\mathcal{B}$ die folgende Menge von Teilmengen von G:
$$\mathcal{B} = \{gH \mid g \in G, H \leq G \text{ Untergruppe mit } [G : H] < \infty\}$$

a) Zeige, dass $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie auf G bildet. Diese wird die *profinite Topologie* genannt. Beweise weiter, dass G versehen mit der profiniten Topologie eine topologische Gruppe ist.

b) Zeige: G ist genau dann residuell endlich, wenn $\{1\} \subseteq G$ abgeschlossen bzgl. der profiniten Topologie ist.

Lösung:

a) Es ist zu zeigen, dass für jedes $g \in G$ eine Teilmenge $U \in \mathcal{B}$ existiert mit $g \in U$. Offenbar ist aber die gesamte Gruppe G eine Untergruppe von G von Index 1 und es gilt somit $G \in \mathcal{B}$.
Zu zeigen: Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ und $g \in U_1 \cap U_2$, so gibt es $U_3 \in \mathcal{B}$ mit $g \in U_3$ und $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.
Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$. Dann gibt es $g_1, g_2 \in G$ und Untergruppen H_1, H_2 von endlichem Index in G mit $U_i = g_i H_i$ für $i = 1, 2$. Sei $g \in U_1 \cap U_2$ beliebig.

Setze $U_3 = g(H_1 \cap H_2)$.
Nach Aufgabe 5.1 b) gilt $[G : (H_1 \cap H_2)] < \infty$, also $U_3 \in \mathcal{B}$. Weiter gilt nach Definition $g \in U_3$.
Da zwei Linksnebenklassen gleich oder disjunkt sind, haben wir $gH_1 = g_1H_1$ sowie $gH_2 = g_2H_2$. Damit erhalten wir:

$$U_3 = g(H_1 \cap H_2) \subseteq gH_1 = g_1H_1 = U_1$$

Analog zeigt man $U_3 \subseteq U_2$ und es gilt folglich $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.
$\mathcal{B}$ ist damit die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf G.
Es bleibt noch zu beweisen, dass G bzgl. $\mathcal{T}$ eine topologische Gruppe ist.
Stetigkeit der Multiplikation: Um die Stetigtkeit der Multiplikation $m : G \times G \to G$ zu zeigen, genügt es zu beweisen, dass für alle Basiselemente $U \in \mathcal{B}$ das Urbild $m^{-1}(U) \subseteq G \times G$ offen bzgl. der von $\mathcal{T}$ induzierten Produkttopologie ist.
Sei $U \in \mathcal{B}$ beliebig. Sei $g \in G$ und $H \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index $n = [G : H]$ mit $U = gH$. Sei weiter $(x, y) \in m^{-1}(U)$ beliebig.
Zu zeigen: Es gibt $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ mit $(x, y) \in U_1 \times U_2$ und $U_1 \times U_2 \subseteq m^{-1}(U)$.
Wegen $xy = m(x, y) \in U = gH$ gilt $xyH = gH$.
Nach Poincarés Theorem (Satz 9 in Kapitel 1 der Vorlesung) enthält H eine Untergruppe N mit $N \trianglelefteq G$ und $[G : N] \leq n!$. Setze $U_1 = xN$ und $U_2 = yN$. Wegen $[G : N] \leq n! < \infty$ gilt $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$.
Seien weiter $n_1, n_2 \in N$ beliebig. Da N normal in G ist, gilt $y^{-1}n_1y \in N$ und somit:

$$m(xn_1, yn_2) = xn_1yn_2 = xy(y^{-1}n_1y)n_2 \in xyN \subseteq xyH = gH = U$$

Da $n_1, n_2 \in N$ beliebig waren, gilt $U_1 \times U_2 = xN \times yN \subseteq m^{-1}(U)$. Damit ist $m^{-1}(U)$ offen bzgl. der Produkttopogie auf $G \times G$.
Da $U \in \mathcal{B}$ beliebig gewählt war, ist die Multiplikation m stetig.
Stetigkeit der Inversenbildung: Für die Stetigkeit der Abbildung $i : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ genügt es wiederum zu zeigen, dass für jedes Basiselement $U \in \mathcal{B}$ das Urbild $i^{-1}(U)$ offen in G ist.
Sei $U \in \mathcal{B}$ beliebig. Sei $g \in G$ und $H \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index $n = [G : H]$ mit $U = gH$. Sei weiter $x \in i^{-1}(U)$ beliebig.
Zu zeigen: Es gibt $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V$ und $V \subseteq i^{-1}(U)$.
Wegen $x^{-1} = i(x) \in U = gH$ gilt $x^{-1}H = gH$.
Nach Poincarés Theorem enthält H eine Untergruppe N mit $N \trianglelefteq G$ und $[G : N] \leq n!$. Setze $V = xN$. Wegen $[G : N] \leq n! < \infty$ gilt $V \in \mathcal{B}$.
Da N normal in G ist, gilt $Nx^{-1} = x^{-1}N$. Somit erhalten wir für alle $n \in N$:

$$i(xn) = (xn)^{-1} = n^{-1}x^{-1} \in Nx^{-1} = x^{-1}N \subseteq x^{-1}H = gH = U$$

Da $n \in N$ beliebig war, gilt $V = xN \subseteq i^{-1}(U)$. Folglich ist $i^{-1}(U)$ offen und i stetig.
Da die Abbildungen m und i stetig sind, ist G bzgl. der profiniten Topologie $\mathcal{T}$ eine topologische Gruppe.

b) „$\Rightarrow$“Sei G residuell endlich. Um zu zeigen, dass $\{1\} \subseteq G$ abgeschlossen ist, zeigen wir, dass das Komplement $G \setminus \{1\}$ offen bzgl. der profiniten

Topologie auf G ist.
Sei $g \in G, g \neq 1$ beliebig. Da G residuell endlich ist, gilt die äquivalente Bedingung ii) aus Aufgabe 5.3. Das heißt, es gibt einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $[G : N] < \infty$ und $g \notin N$. Dann ist gN ein Basiselement aus $\mathcal{B}$, das g enthält. Insbesondere gilt $gN \neq N$ und somit $1 \notin gN$, also $gN \subseteq G \setminus \{1\}$.
Da $g \in G \setminus \{1\}$ beliebig war, ist $G \setminus \{1\}$ damit offen.
„$\Leftarrow$" Sei $\{1\} \subseteq G$ abgeschlossen bzgl. der profiniten Topologie auf G. Wir zeigen, dass G residuell endlich ist, indem wir das Kriterium ii) aus Aufgabe 5.3 überprüfen.
Sei $g \in G \setminus \{1\}$ beliebig.
Zu zeigen: Es gibt einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $g \notin N$ und $[G : N] < \infty$.
Da $\{1\}$ abgeschlossen in G ist, ist $G \setminus \{1\}$ eine offene Umgebung von g. Da $\mathcal{B}$ eine Basis der profiniten Topologie ist, existiert also $U \in \mathcal{B}$ mit $g \in U$ und $U \subseteq G \setminus \{1\}$, d.h. $1 \notin U$. Sei $g' \in G$ und $H \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index $n = [G : H]$ mit $U = g'H$.
Nach Poincarés Theorem enthält H eine Untergruppe N mit $N \trianglelefteq G$ und $[G : N] \leq n! < \infty$. Wegen $1 \notin U = gH$ gilt $gH \neq H$. Damit sind die Linksnebenklassen gH und H disjunkt. Aus $N \subseteq H$ und $gN \subseteq gH$ folgt daher $gN \neq N$, also $g \notin N$.
Somit erfüllt G die Bedingung ii) aus Aufgabe 5.3 und G ist residuell endlich.