4. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 4.1
Sei F_k die freie Gruppe von endlichem Rang k und G eine endliche Gruppe der Ordnung n.

a) Bestimme die Mächtigkeit der Menge $\mathrm{Hom}(F_k, G)$.

b) Benutze Teil a), um einen neuen Beweis für die Äquivalenz der Aussagen (i) und (iii) aus Satz 13 in Kapitel 2 der Vorlesung zu geben. Zeige also: F_k ist genau dann isomorph zu F_l, wenn $k = l$ gilt.

Aufgabe 4.2
Sei X eine Menge und $F = F(X)$ die freie Gruppe über X. Weiter bezeichne DF die Kommutatorgruppe von F.
Für jedes $x \in X$ definieren wir eine Abbildung $\sigma_x : F \to \mathbb{Z}$ wie folgt:
Ist $f = x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ eine reduzierte Darstellung, so setze $\sigma_x(f) = \sum\limits_{x_i = x} k_i$.
Zeige: Ein Element $f \in F$ liegt genau dann in DF, wenn $\sigma_x(f) = 0$ für alle $x \in X$ gilt.
Hinweis: Beweise zuerst, dass jedes σ_x ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4.3
Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Weiter sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ und $H_1, \ldots, H_k$ seien nicht-triviale Untergruppen von G mit $\#H_1 \geq 3$.
Seien $X_1, \ldots, X_k$ nicht-leere, paarweise disjunkte Teilmengen von X, sodass für $1 \leq i, s \leq k$ mit $i \neq s$ und jedes $h \in H_i \setminus \{e\}$ die Bedingung $h(X_s) \subseteq X_i$ erfüllt ist.
Zeige: Die Untergruppe $\langle H_1, \ldots, H_k \rangle$ ist isomorph zum freien Produkt $H_1 * \ldots * H_k$.
Hinweis: Benutze das Ping-Pong-Lemma und vollständige Induktion.

Bitte wenden.

Aufgabe 4.4
Seien X, Y Mengen mit $X \cap Y = \emptyset$ und $R \subseteq F(X), S \subseteq F(Y)$. Zeige:

a) Es gilt $\langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle \cong \langle X \mid R \rangle * \langle Y \mid S \rangle$.

b) Ist $C = \{[x, y] \mid x \in X, y \in Y\}$, so gilt

$$\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle \cong \langle X \mid R \rangle \times \langle Y \mid S \rangle.$$

Hinweis: Betrachte die universellen Eigenschaften.

***-Aufgabe**
Bestimme die Gruppe $\langle a, b \mid a^{-1}bab^{-2}, b^{-1}aba^{-2} \rangle$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 19.11.2015, 8 Uhr