4. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“
Musterlösung

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 4.1
Sei F_k die freie Gruppe von endlichem Rang k und G eine endliche Gruppe der Ordnung n.

a) Bestimme die Mächtigkeit der Menge $\mathrm{Hom}(F_k, G)$.

b) Benutze Teil a), um einen neuen Beweis für die Äquivalenz der Aussagen (i) und (iii) aus Satz 13 in Kapitel 2 der Vorlesung zu geben. Zeige also: F_k ist genau dann isomorph zu F_l, wenn $k = l$ gilt.

Lösung:

a) Sei F_k die freie Gruppe über $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Wir definieren die Abbildung $\mathrm{res} : \mathrm{Hom}(F_k, G) \to \mathrm{Abb}(X, G), \varphi \mapsto \varphi|_X$.
<u>Behauptung:</u> res ist eine Bijektion.
<u>Beweis:</u> Sei $f : X \to G$ eine beliebige Abbildung. Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe F_k gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\tilde{f} : F_k \to G$ mit $\tilde{f}(x_i) = f(x_i)$ für $i = 1, \ldots, k$.
Dann gilt aber: $\mathrm{res}(\tilde{f}) = \tilde{f}|_X = f$ Somit ist res surjektiv.
Wegen der Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ ist res auch injektiv und damit bijektiv.

Mithilfe der Bijektion res erhalten wir:

$$\#\mathrm{Hom}(F_k, G) = \#\mathrm{Abb}(X, G) = (\#G)^{\#X} = n^k$$

b) „$\Leftarrow$“ Seien X, Y Mengen mit $\#X = k$, $\#Y = l$ und F_k die freie Gruppe über X sowie F_l die freie Gruppe über Y. Gilt $k = l$, so existiert eine Bijektion $f : X \to Y$. Man überprüft leicht, dass f durch die universelle Eigenschaft der freien Gruppe F_k einen Isomorphismus $\tilde{f} : F_k \to F_l$ induziert.
„$\Rightarrow$“ Sei $F_k \cong F_l$. Dann gilt offenbar: $\#\mathrm{Hom}(F_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \#\mathrm{Hom}(F_l, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
Nach Teil a) haben wir daher

$$2^k = \#\mathrm{Hom}(F_k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \#\mathrm{Hom}(F_l, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 2^l$$

und somit $k = l$.

Aufgabe 4.2
Sei X eine Menge und $F = F(X)$ die freie Gruppe über X. Weiter bezeichne DF die Kommutatorgruppe von F.
Für jedes $x \in X$ definieren wir eine Abbildung $\sigma_x : F \to \mathbb{Z}$ wie folgt:

Ist $f = x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ eine reduzierte Darstellung, so setze $\sigma_x(f) = \sum\limits_{x_i = x} k_i$.
Zeige: Ein Element $f \in F$ liegt genau dann in DF, wenn $\sigma_x(f) = 0$ für alle $x \in X$ gilt.

Lösung: Sei $x \in X$ beliebig. Wir zeigen zunächst, dass σ_x ein Gruppenhomomorphismus ist.

Definiere eine Abbildung $s_x : X \to \mathbb{Z}$ durch $s_x(y) = \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & , \ y = x \\ 0 & , \ y \neq x \end{cases}$.
Mit der universellen Eigenschaft der freien Gruppe F erhalten wir einen (eindeutigen) Gruppenhomomorphismus $\tilde{s}_x : F_k \to \mathbb{Z}$ mit $\tilde{s}_x(y) = s_x(y)$ für alle $y \in X$. Sei $f \in F$ beliebig und $f = x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ eine reduzierte Darstellung. Da $\tilde{s}$ ein Homomorphismus ist, gilt nun:

$$\tilde{s}_x(f) = \tilde{s}_x(x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}) = k_1 \cdot \tilde{s}_x(x_1) + \ldots + k_n \cdot \tilde{s}_x(x_n) = k_1 \cdot s_x(x_1) + \ldots + k_n \cdot s_x(x_n)$$

Es ist aber $k_i \cdot s_x(x_i) = 0$ falls $x_i \neq x$ und $k_i \cdot s_x(x_i) = k_i$ falls $x_i = x$. Damit folgt insgesamt:

$$\tilde{s}_x(f) = \sum_{x_i = x} k_i = \sigma_x(f)$$

Da $f \in F$ beliebig war, gilt $\sigma_x = \tilde{s}_x$ und σ_x ist inbesondere ein Gruppenhomomorphismus.

Sei $F_{ab} = F/DF$ die Abelisierung von F und $\pi : F \to F/DF = F_{ab}$ die kanonische Projektion. Nach Korollar 12 aus Kapitel 2 der Vorlesung ist F_{ab} isomorph zu der freien abelschen Gruppe über X. Wir schreiben $\bar{x}$ für die Klasse $xDF \in F_{ab}$ eines Elements $x \in X$. Nun beweisen wir eine Hilfsaussage, aus der die zu beweisende Aussage leicht folgt:
Hilfsbehauptung: Für alle $f \in F$ gilt

$$\pi(f) = \sum_{x \in X} \sigma_x(f) \cdot \bar{x}$$

Beweis: Da σ_x für jedes $x \in X$ ein Homomorphismus ist, definiert $f \mapsto \sum\limits_{x \in X} \sigma_x(f) \cdot \bar{x}$ einen Gruppenhomomorphismus $\theta : F(X) \to F_{ab}$. Wegen der universellen Eigenschaft der freien Gruppe F genügt es zu zeigen, dass die Abbildungen π und θ auf der Menge X übereinstimmen. Sei $y \in X$ beliebig. Dann gilt:

$$\theta(y) = \sum_{x \in X} \sigma_x(y) \cdot \bar{x} = \sum_{x \in X} \delta_{xy} \cdot \bar{x} = \bar{y} = \pi(y)$$

Damit sind die Abbildungen π und θ gleich und die Hilfsbehauptung ist gezeigt.

„$\Rightarrow$“ Sei $f \in DF$ beliebig. Dann liegt f im Kern der kanonischen Projektion π und es folgt mit der Hilfsbehauptung:

$$0 = \pi(f) = \theta(f) = \sum_{x \in X} \sigma_x(f) \cdot \bar{x}$$

Da F_{ab} die freie abelsche Gruppe über der Menge $\{\bar{x} \mid x \in X\}$ ist, verschwinden alle Koeffizienten in der Summe, d.h. $\sigma_x(f) = 0$ für alle $x \in X$.

„$\Leftarrow$" Sei $f \in F$ mit $\sigma_x(f) = 0$ für alle $x \in X$. Dann gilt nach Hilfsbehauptung:

$$\pi(f) = \theta(f) = \sum_{x \in X} \sigma_x(f) \cdot \bar{x} = \sum_{x \in X} 0 \cdot \bar{x} = 0$$

Somit liegt f in $\ker(\pi) = DF$.

Aufgabe 4.3
Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Weiter sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ und $H_1, \ldots, H_k$ seien nicht-triviale Untergruppen von G mit $\# H_1 \geq 3$.
Seien $X_1, \ldots, X_k$ nicht-leere, paarweise disjunkte Teilmengen von X, sodass für $1 \leq i, s \leq k$ mit $i \neq s$ und jedes $h \in H_i \setminus \{e\}$ die Bedingung $h(X_s) \subseteq X_i$ erfüllt ist.
Zeige: Die Untergruppe $\langle H_1, \ldots, H_k \rangle$ ist isomorph zum freien Produkt $H_1 * \ldots * H_k$.

Lösung: Mit vollständiger Induktion nach k:
Induktionsanfang: Für $k = 2$ folgt die Aussage mit dem Ping-Pong-Lemma (Satz 14 in Kapitel 2 der Vorlesung) für $A = H_2, B = H_1, Q = X_1$ und $P = X_2$.
Induktionsschritt: Sei die Aussage wahr für $k-1$ Untergruppen für ein festes $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$.
Sei $H = \langle H_1, \ldots, H_{k-1} \rangle$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt nun $H \cong H_1 * \ldots * H_{k-1}$.
Wir wollen das Ping-Pong-Lemma auf die Gruppen $B = H$ und $A = H_k$ sowie die Mengen $Q = \bigcup_{i \leq k-1} X_i$ und $P = X_k$ anwenden.
Wegen $\# H_1 \geq 3$ und $H_1 \leq B$ gilt $\# B \geq 3$. Zudem ist $A = H_k$ nach Voraussetzung nicht-trivial, also $\# A \geq 2$. Weiter sind Q und P disjunkt. Insbesondere gilt also $Q \nsubseteq P$.
Sei $a \in A = H_k, a \neq e$. Sei $q \in Q = \bigcup_{i \leq k-1} X_i$ beliebig. Dann gibt es $1 \leq i \leq k-1$ mit $q \in X_i$. Aus $i \neq k$ folgt nach Voraussetzung $a(q) \in a(X_i) \subseteq X_k = P$.
Da $q \in Q$ beliebig war, gilt $a(Q) \subseteq P$.
Sei $b \in B = H, b \neq e$. Wir müssen zeigen: $b(P) \subseteq Q$
Schreibe nun $b = h_{j_n} \cdot \ldots \cdot h_{j_1}$ mit $h_{j_s} \in H_{j_s}, j_s \leq k-1$ und $j_s \neq j_{s+1}$ für alle $1 \leq s \leq n$. Wir zeigen induktiv, dass $b(P) \subseteq X_{j_n}$ gilt:
Ist $n = 1$, so gilt $b = h_{j_1}$. Wegen $j_1 \neq k$ gilt nach Voraussetzung:

$$b(P) = h_{j_1}(P) = h_{j_1}(X_k) \subseteq X_{j_1}$$

Gilt die Aussage $b'(P) \subseteq X_{j'_{n-1}}$ für Elemente $b' \in B$ der Form $b' = h'_{j_{n-1}} \cdot \ldots \cdot h'_{j_1}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, so haben wir $(h_{j_{n-1}} \cdot \ldots \cdot h_{j_1})(P) \subseteq X_{j_{n-1}}$.
Wegen $j_n \neq j_{n-1}$ gilt dann:

$$b(P) = h_{j_n}((h_{j_{n-1}} \cdot \ldots \cdot h_{j_1})(P)) \subseteq h_{j_n}(X_{j_{n-1}}) \subseteq X_{j_n}$$

Damit gilt aber $b(P) \subseteq X_{j_n} \subseteq \bigcup_{i \leq k-1} X_i = Q$.
Folglich sind alle Voraussetzungen des Ping-Pong-Lemmas erfüllt und wir erhalten

$$\langle H_1, \ldots, H_k \rangle = \langle H, H_k \rangle \cong H * H_k \cong (H_1 * \ldots * H_{k-1}) * H_k = H_1 * \ldots * H_k.$$

Aufgabe 4.4
Seien X, Y Mengen mit $X \cap Y = \emptyset$ und $R \subseteq F(X), S \subseteq F(Y)$. Zeige:

a) Es gilt $\langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle \cong \langle X \mid R \rangle * \langle Y \mid S \rangle$.

b) Ist $C = \{[x, y] \mid x \in X, y \in Y\}$, so gilt

$$\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle \cong \langle X \mid R \rangle \times \langle Y \mid S \rangle.$$

Lösung:

a) Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe $F(X)$ induziert die Abbildung $X \to \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle, x \mapsto x$ (wobei x rechts als Element in dem Quotienten $F(X \cup Y)/\langle\langle R \cup S \rangle\rangle = \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$ aufgefasst wird) einen Homomorphismus $\tilde{\iota}_X : F(X) \to \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$.
Da $R \subseteq F(X)$ nach Definition von $\langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$ im Kern von $\tilde{\iota}_X$ enthalten ist, erhalten wir nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $\langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$ (bzw. dem Homomorphiesatz) einen Homomorphismus $\iota_X : \langle X \mid R \rangle \to \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$ mit $\iota_X \circ \pi_R = \tilde{\iota}_X$, wobei π_R die kanonische Projektion $\pi_R : F(X) \to F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle = \langle X \mid R \rangle$ ist.
Analog erhalten wir einen Homomorphismus $\iota_Y : \langle Y \mid S \rangle \to \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$ mit $\iota_Y \circ \pi_S = \tilde{\iota}_Y$.
Wir zeigen, dass $\langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$ mit den Abbildungen ι_X und ι_Y die universelle Eigenschaft des freien Produkts $\langle X \mid R \rangle * \langle Y \mid S \rangle$ erfüllt.
(Bemerkung: Wie in der Vorlesung gesehen ist dies die universelle Eigenschaft des Koprodukts in der Kategorie der Gruppen.)
Sei dafür G eine beliebige Gruppe und seien $f_X : \langle X \mid R \rangle \to G$ und $f_Y : \langle Y \mid S \rangle \to G$ Gruppenhomomorphismen.
Zu zeigen: Es gibt einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $f : \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle \to G$ mit $f \circ \iota_X = f_X$ und $f \circ \iota_Y = f_Y$.
Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe $F(X \cup Y)$ gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\tilde{f} : F(X \cup Y) \to G$ mit $\tilde{f}(x) = f_X(x)$ für alle $x \in X$ und $\tilde{f}(y) = f_Y(y)$.
Für $r \in R$ gilt $r = e \in \langle X \mid R \rangle$, also $\tilde{f}(r) = f_X(r) = e$. Analog erhalten wir auch $\tilde{f}(s) = e$ für $s \in S$.
Da nun $R \cup S$ im Kern von $\tilde{f}$ enthalten ist, gibt es nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $\langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$ einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $f : \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle \to G$ mit $f \circ \pi_{R \cup S} = \tilde{f}$, wobei $\pi_{R \cup S} : F(X \cup Y) \to \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$ die kanonische Projektion ist.
Nach Konstruktion gilt $f \circ \iota_X = f_X$ und $f \circ \iota_Y = f_Y$ und wegen der Eindeutigkeit der induzierten Homomorphismen in den universellen Eigenschaften ist f eindeutig.
Somit erfüllt $\langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle$ die universelle Eigenschaft des freien Produkts $\langle X \mid R \rangle * \langle Y \mid S \rangle$. Da das freie Produkt bis auf Isomorphie eindeutig ist, gilt also $\langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle \cong \langle X \mid R \rangle * \langle Y \mid S \rangle$.

b) Betrachte die Abbildung $X \cup Y \to \langle X \mid R \rangle$ gegeben durch $x \mapsto x$ für $x \in X$ und $y \mapsto e$ für $y \in Y$. Mit der universellen Eigenschaft der freien

Gruppe $F(X \cup Y)$ induziert dies einen (eindeutigen) Homomorphismus $\tilde{\mathrm{pr}}_X : F(X \cup Y) \to \langle X \mid R \rangle$. Nach Definition der Gruppe $\langle X \mid R \rangle$ gilt $R \subseteq \ker(\tilde{\mathrm{pr}}_X)$. Wegen $\tilde{\mathrm{pr}}_X(y) = e$ für alle $y \in Y$ gilt zudem $S \subseteq \ker(\tilde{\mathrm{pr}}_X)$. Seien weiter $x \in X, y \in Y$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{pr}_X([x,y]) &= \tilde{pr}_X(xyx^{-1}y^{-1}) = \tilde{pr}_X(x) \cdot \tilde{pr}_X(y) \cdot \tilde{pr}_X(x)^{-1} \cdot \tilde{pr}_X(y)^{-1} \\ &= \tilde{pr}_X(x) \cdot e \cdot \tilde{pr}_X(x)^{-1} \cdot e = \tilde{pr}_X(x) \cdot \tilde{pr}_X(x)^{-1} = e\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Menge C im Kern von $\tilde{pr}_X$ liegt. Insgesamt ist damit $R \cup S \cup C$ in $\ker(\tilde{pr}_X)$ enthalten und nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ existiert ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{pr}_X :$ $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle \to \langle X \mid R \rangle$ mit $\mathrm{pr}_X \circ \pi_{R \cup S \cup C} = \tilde{\mathrm{pr}}_X$, wobei $\pi_{R \cup S \cup C}$ die kanonische Projektion $\pi_{R \cup S \cup C} : F(X \cup Y) \to \langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ ist.
Analog induziert die Abbildung $X \cup Y \to \langle Y \mid S \rangle, x \mapsto e, y \mapsto y$ für $x \in X, y \in Y$ einen Homomorphismus $\mathrm{pr}_Y : \langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle \to \langle Y \mid S \rangle$ mit $\mathrm{pr}_Y \circ \pi_{R \cup S \cup C} = \tilde{\mathrm{pr}}_Y$.
Wir zeigen, dass $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ mit den Abbildungen pr_X und pr_Y die universelle Eigenschaft des direkten Produkts erfüllt.
Sei dafür G eine beliebige Gruppe und seien $f_X : G \to \langle X \mid R \rangle$ sowie $f_Y : G \to \langle Y \mid S \rangle$ Gruppenhomomorphismen.
Zu zeigen: Es gibt einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus
$f : G \to \langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ mit $\mathrm{pr}_X \circ f = f_X$ und $\mathrm{pr}_Y \circ f = f_Y$.
Setze $f : G \to \langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle, f(g) = f_X(g) \cdot f_Y(g)$, wobei $f_X(g)$ und $f_Y(g)$ jetzt als Elemente in $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ aufgefasst werden. (Beachte: Da R und S Relationen sind, ist dies wohldefiniert.)
Es ist noch zu zeigen, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist.
Seien $g, h \in G$ beliebig.
Sei U_1 die von X erzeugte Untergruppe in $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ und U_2 die von Y erzeugte Untergruppe in $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$. Aufgrund der Relationen C kommutiert in $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ jedes Element $x \in X$ mit jedem Element $y \in Y$. Daher kommutiert auch die Untergruppe U_1 mit der Untergruppe U_2.
Nach Konstruktion liegt $f_X(h)$ in U_1 und $f_Y(g)$ in U_2. Also gilt
$f_X(h) \cdot f_Y(g) = f_Y(g) \cdot f_X(h)$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned}f(gh) &= f_X(gh) \cdot f_Y(gh) = f_X(g) \cdot f_X(h) \cdot f_Y(g) \cdot f_Y(h) \\ &= f_X(g) \cdot f_Y(g) \cdot f_X(h) \cdot f_Y(h) = f(g) \cdot f(h)\end{aligned}$$

Da $g, h \in G$ beliebig waren, ist f ein Gruppenhomomorphismus.
Nach Konstruktion von pr_X gilt $\mathrm{pr}_X(w) = w$ für jedes Element $w \in U_1$ und $\mathrm{pr}_X(z) = e$ für jedes Element $z \in U_2$. Daraus folgt für jedes $g \in G$

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_X(f(g)) &= \mathrm{pr}_X(f_X(g) \cdot f_Y(g)) = \mathrm{pr}_X(f_X(g)) \cdot \mathrm{pr}_X(f_Y(g)) \\ &= f_X(g) \cdot e = f_X(g),\end{aligned}$$

d.h. $\mathrm{pr}_X \circ f = f_X$. Genauso zeigt man $\mathrm{pr}_Y \circ f = f_Y$.
Um die Eindeutigkeit von f nachzuweisen, betrachten wir einen Homomorphismus $f' : G \to \langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ mit $f' \circ \mathrm{pr}_X = f_X,\ f' \circ \mathrm{pr}_Y = f_Y$ und zeigen $f' = f$.
Sei $g \in G$ beliebig. Da die Untergruppen U_1 und U_2 kommutieren und

die Gruppe $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ erzeugen, gibt es $w \in U_1, z \in U_2$ mit $f'(g) = wz$. Nun erhalten wir:

$w = \mathrm{pr}_X(wz) = \mathrm{pr}_X(f'(g)) = f_X(g)$ und $z = \mathrm{pr}_Y(wz) = \mathrm{pr}_Y(f'(g)) = f_Y(g)$

Daraus folgt mit der Definition von f:

$$f'(g) = wz = f_X(g) \cdot f_Y(g) = f(g)$$

Da $g \in G$ beliebig war, gilt $f' = f$ und f ist eindeutig.
Somit erfüllt $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle$ die universelle Eigenschaft des direkten Produkts. Da das direkte Produkt bis auf Isomorphie eindeutig ist, gilt also $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup C \rangle \cong \langle X \mid R \rangle \times \langle Y \mid S \rangle$.

***-Aufgabe**
Bestimme die Gruppe $\langle a, b \mid a^{-1}bab^{-2}, b^{-1}aba^{-2} \rangle$.

Lösung: Wir zeigen, dass diese Gruppe trivial ist, indem wir beweisen, dass die beiden Erzeuger a und b gleich dem neutralen Element e sind. Betrachte die beiden Relationen:

$$a^{-1}bab^{-2} = e \tag{1}$$
$$b^{-1}aba^{-2} = e \tag{2}$$

Multiplizieren wir (1) von links mit a und von rechts mit b^2 erhalten wir:

$$ba = ab^2$$

Multiplizieren wir (2) von links mit b und von rechts mit a^2 erhalten wir:

$$ab = ba^2$$

Dann gilt aber:

$$ba = ab^2 = (ab)b = ba^2b = ba(ab) \Rightarrow ab = e \Rightarrow a = b^{-1}$$

Setzen wir $a = b^{-1}$ in die Relation (1) ein, erhalten wir:

$$e = a^{-1}bab^{-2} = a^{-1}a^{-1}aa^2 = a$$

Folglich gilt $a = e$ und $b = a^{-1} = e^{-1} = e$ und die Gruppe ist trivial.