3. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“
Musterlösung

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 3.1
Sei I eine Indexmenge und A_α für jedes $\alpha \in I$ eine abelsche Gruppe.
Sei weiter $A = \bigoplus_{\alpha\in I} A_\alpha$ die direkte Summe der A_α, also

$$A = \bigoplus_{\alpha\in I} A_\alpha = \{(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} A_\alpha \mid a_\alpha = e \text{ für fast alle } \alpha \in I\}.$$

Zeige: A ist das Koprodukt der Familie $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ in der Kategorie der abelschen Gruppen, d.h. es gibt Homomorphismen $i_\alpha : A_\alpha \to A$, sodass für jede abelsche Gruppe B und Homomorphismen $f_\alpha : A_\alpha \to B$ ein eindeutiger Homomorphismus $f : A \to B$ mit $f \circ i_\alpha = f_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ existiert.

Lösung: Wir definieren zuerst die Homomorphismen $i_\alpha : A_\alpha \to A$.
Sei $\alpha \in I$ beliebig und $x \in A_\alpha$. Setze für $\beta \in I$

$$a_\beta(x) = \begin{cases} x & , \beta = \alpha \\ e & , \beta \neq \alpha \end{cases}$$

und $i_\alpha(x) = (a_\beta(x))_{\beta\in I}$. Da die Verknüpfung in A komponentenweise definiert ist, ist i_α ein Gruppenhomomorphismus.
Sei B eine beliebige abelsche Gruppe und $f_\alpha : A_\alpha \to B$ für jedes $\alpha \in I$ ein Homomorphismus.
Definiere $f : A \to B, (a_\alpha)_{\alpha\in I} \mapsto \sum_{\alpha\in I} f_\alpha(a_\alpha)$. Hier meint $\sum$ die Verknüpfung in der abelschen Gruppe B. Da $a_\alpha = e$ für fast alle $\alpha \in I$ gilt, ist diese Summe endlich und f ist wohldefiniert.
Seien $(a_\alpha)_{\alpha\in I}, (a'_\alpha)_{\alpha\in I} \in A$ beliebig. Da die f_α Homomorphismen sind, gilt dann:

$$\begin{aligned} f((a_\alpha)_{\alpha\in I} + (a'_\alpha)_{\alpha\in I}) = f((a_\alpha + a'_\alpha)_{\alpha\in I}) &= \sum_{\alpha\in I} f_\alpha(a_\alpha + a'_\alpha) = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha(a_\alpha) + f_\alpha(a'_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha\in I} f_\alpha(a_\alpha) + \sum_{\alpha\in I} f_\alpha(a'_\alpha) = f((a'_\alpha)_{\alpha\in I})) + f((a'_\alpha)_{\alpha\in I})) \end{aligned}$$

Somit ist f ein Homomorphismus. Sei weiter $\alpha \in I$ beliebig und $x \in A_\alpha$. Dann gilt:

$$f(i_\alpha(x)) = f((a_\beta(x))_{\beta\in I}) = \sum_{\beta\in I} f_\beta(a_\beta(x)) = f_\alpha(x)$$

Denn für $\beta \neq \alpha$ gilt $a_\beta(x) = e$ und daher $f(a_\beta(x))) = e_B$. Dies zeigt: $f \circ i_\alpha = f_\alpha$
Es bleibt noch zu zeigen, dass der Homomorphismus f eindeutig ist. Sei also $g : A \to B$ ein weiterer Homomorphismus mit $g \circ i_\alpha = f_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Sei

weiter $(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in A$ beliebig. Da nur endlich viele Einträge a_α nicht-trivial sind, können wir $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ durch

$$(a_\alpha)_{\alpha\in I} = \sum_{\alpha\in I} i_\alpha(a_\alpha)$$

als endliche Summe darstellen. Damit erhalten wir:

$$g((a_\alpha)_{\alpha\in I}) = g(\sum_{\alpha\in I} i_\alpha(a_\alpha)) = \sum_{\alpha\in I} g\circ i_\alpha(a_\alpha) = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha(a_\alpha) = f((a_\alpha)_{\alpha\in I})$$

Da $(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in A$ beliebig war, folgt $g = f$ und der Homomorphismus f ist eindeutig.

Aufgabe 3.2
Sei A eine abelsche Gruppe. Zeige:

a) $\mathrm{Tor}(A)$ ist eine Untergruppe von A und $A/\mathrm{Tor}(A)$ ist torsionsfrei.

b) Ist G eine beliebige Gruppe, so ist $\mathrm{Tor}(G)$ im Allgemeinen keine Untergruppe von G.

Lösung:

a) Das neutrale Element $e \in A$ hat Ordnung 1 und ist damit ein Torsionselement.
Seien $a, b \in \mathrm{Tor}(A)$. Zu zeigen: $ab \in \mathrm{Tor}(A)$
Nach Voraussetzung gibt es $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $a^n = e$ und $b^m = e$.
Da A abelsch ist, gilt dann:

$$(ab)^{nm} = a^{nm}b^{nm} = (a^n)^m(b^m)^n = e^m e^n = ee = e$$

Somit gilt $ab \in \mathrm{Tor}(A)$.
Wegen $\mathrm{ord}(a^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$ ist auch a^{-1} ein Torsionselement. Damit ist $\mathrm{Tor}(A)$ eine Untergruppe von A
Es bleibt zu zeigen, dass $A/\mathrm{Tor}(A)$ torsionsfrei ist. Sei dafür $x \in A/\mathrm{Tor}(A)$ ein Torsionselement und $a \in A$ mit $x = a\mathrm{Tor}(A)$. Nach Definition existiert ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $x^n = e_{A/\mathrm{Tor}(A)}$, also:

$$a^n\mathrm{Tor}(A) = (a\mathrm{Tor}(A))^n = x^n = e_{A/\mathrm{Tor}(A)} = \mathrm{Tor}(A)$$

Hieraus folgt $a^n \in \mathrm{Tor}(A)$. Folglich gibt es $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $e = (a^n)^m = a^{nm}$.
Dies zeigt $a \in \mathrm{Tor}(A)$, also $x = a\mathrm{Tor}(A) = \mathrm{Tor}(A) = e_{A/\mathrm{Tor}(A)}$.
Nach Definition ist $A/\mathrm{Tor}(A)$ somit torsionsfrei.

b) Wir betrachten als Gegenbeispiel die Gruppe $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ der Isometrien des metrischen Raums $\mathbb{R}$ mit der Betragsmetrik. Wir definieren die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2 - x$. Man rechnet leicht nach, dass f und g Isometrien sind. (Geometrisch ist f die Spiegelung am Punkt 0 und g die Spiegelung am Punkt 1.)
Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f^2(x) = f(f(x)) = -(-x) = x$$
$$g^2(x) = g(g(x)) = 2 - (2 - x) = 2 - 2 + x = x$$

Dies zeigt $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = g^2$, also $f, g \in \mathrm{Tor}(G)$. Wir zeigen nun, dass die Isometrie $h = f \circ g$ kein Torsionselement in G ist. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h(x) = f(g(x)) = f(2 - x) = -(2 - x) = x - 2$$

Somit gilt $h^k(x) = x - 2k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $h^k(0) = 0$ genau dann, wenn $k = 0$ gilt. Folglich haben wir $h^k \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, d.h. $h \notin \mathrm{Tor}(G)$.
Da $\mathrm{Tor}(G)$ bezüglich der Gruppenverknüpfung nicht abgeschlossen ist, ist $\mathrm{Tor}(G)$ keine Untergruppe von G.

Aufgabe 3.3
Sei X eine Menge und $F = F(X)$ die freie Gruppe über X. Desweiteren sei $H \leq F$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige:

a) F ist torsionsfrei.

b) Ist $G \leq F$ eine Untergruppe mit $G \cap H = \{e\}$, so gilt bereits $G = \{e\}$.

Lösung:

a) Sei $z = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in X \cup X^{-1}$. Wir nennen das Wort z *zyklisch reduziert*, wenn $x_1 \neq x_n^{-1}$ gilt.
Ist nun $z \in F$ ein beliebiges Element, so können wir z immer darstellen als $z = wz'w^{-1}$, wobei z' aufgefasst als Wort über dem Alphabet $X \cup X^{-1}$ zyklisch reduziert ist. (Wir können w als das maximale Anfangsstück von z wählen, sodass z sich als $wz'w^{-1}$ schreiben lässt.)
Sei nun $z \neq e$. Dann gilt offenbar $z' \neq e$. Also hat z' als Wort über dem Alphabet $X \cup X^{-1}$ eine Länge $k > 0$. Da z' zyklisch reduziert ist, hat für $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ das Element $(z')^s$ die Länge sk. Insbesondere ist $(z')^s$ nicht das leere Wort, welches das neutrale Element in F repräsentiert.
Es folgt daher für alle $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

$$z^s = (wz'w^{-1})^s = w(z')^s w^{-1} \neq wew^{-1} = e$$

Damit ist z also kein Torsionselement und F ist torsionsfrei.

b) Sei $G \leq F$ eine Untergruppe mit $G \cap H = \{e\}$. Sei $g \in G$ beliebig.
Da H endlichen Index in F hat, existieren nur endlich viele Linksnebenklassen von H in F. Somit gibt es $j, k \in \mathbb{N}$ mit $j < k$ und $g^j H = g^k H$. Dann gilt $g^{k-j} \in H \cap G = \{e\}$, also $g^{k-j} = e$ mit $k - j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
Folglich ist g ein Torsionselement in F. Nach Teil a) ist die Gruppe F torsionsfrei und es folgt $g = e$.
Da $g \in G$ beliebig gewählt war, gilt schon $G = \{e\}$.

Aufgabe 3.4
Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $F(X)$ die freie Gruppe über X.
Sei $\varphi : G \to F(X)$ ein Epimorphismus.
Sei $i : X \to G$ ein Schnitt für φ, d.h. $\varphi(i(x)) = x$ für alle $x \in X$. Es bezeichne $X' = i(X)$ und $H = \langle X' \rangle$ die von X' erzeugte Untergruppe von G.

Beweise: $H \cong F(X)$

Lösung: Die Zuordnung $i : X \to X' \subseteq H$ induziert nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe einen (eindeutigen) Gruppenhomomorphismus $\psi : F(X) \to H$ mit $\psi(x) = i(x)$ für alle $x \in X$.
Wir wollen zeigen: ψ ist ein Isomorphismus.
surjektiv: Das Bild von ψ enthält die Menge $\psi(X) = i(X) = X'$. Da diese H nach Definition erzeugt, ist ψ surjektiv.
injektiv: Betrachte die Einschränkung $\varphi|_H : H \to F(X)$. Da i ein Schnitt für φ ist, gilt für alle $x \in X$:

$$(\varphi|_H \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi(i(x)) = x$$

Damit ist $\varphi|_H \circ \psi : F(X) \to F(X)$ ein Gruppenhomomorphismus, der jedes $x \in X$ festhält. Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe $F(X)$ ist ein solcher Homomorphismus eindeutig. Andererseits erfüllt der Identitätshomomorphismus $\mathrm{id}_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ offensichtlich ebenfalls diese Bedingung. Wegen der Eindeutigkeit folgt daher $\varphi|_H \circ \psi = \mathrm{id}_{F(X)}$. Da $\varphi|_H \circ \psi$ injektiv ist, ist ψ injektiv.
Insgesamt ist ψ damit ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, also ein Isomorphismus und es gilt $H \cong F(X)$.

***-Aufgabe**
Welche der folgenden abelschen Gruppen sind isomorph?

a) $(\mathbb{Z}, +)$ b) $(\mathbb{Z}^2, +)$
c) $(\mathbb{Q}, +)$ d) $(\mathbb{Q}^2, +)$
e) $(\mathbb{R}, +)$ f) $(\mathbb{R}^2, +)$

Lösung: Wir zeigen, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ zueinander isomorph sind und ansonsten keine der restlichen angegebenen Gruppen isomorph zu einer anderen Gruppe in der Liste ist.
Die Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^2$ sind abzählbar und damit nicht isomorph zu den überabzählbaren Gruppen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.
Behauptung: $\mathbb{Z}$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{Z}^2$.
Beweis: Per Widerspruch: Angenommen, $\mathbb{Z}^2$ sei zyklisch. Dann gibt es $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, welches $\mathbb{Z}^2$ erzeugt. Insbesondere existiert dann ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \cdot (a, b) = (a, b+1)$. Daraus folgt $ka = a$ und $kb = b + 1$. Wegen $b \neq b + 1$ gilt $k \neq 1$.
Andererseits haben wir: $(k - 1) \cdot a = 0$
Da $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei ist, folgt $a = 0$, also $(a, b) = (0, b)$. Dann liegt aber offensichtlich das Element $(1, 0)$ nicht im Erzeugnis von (a, b). $\lightning$
Behauptung: $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^2$ sind jeweils nicht isomorph zu $\mathbb{Q}$.
Beweis: $\mathbb{Z}$ ist zyklisch und $\mathbb{Z}^2$ wird erzeugt von den Elementen $(1, 0), (0, 1)$. Nach Aufgabe 2.2 a) ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt.
Behauptung: $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^2$ sind jeweils nicht isomorph zu $\mathbb{Q}^2$.
Beweis: Es genügt zu zeigen, dass auch $\mathbb{Q}^2$ nicht endlich erzeugt ist.

Per Widerspruch: Angenommen, $\mathbb{Q}^2$ sei endlich erzeugt. Dann ist $\mathbb{Q}^2$ nach Korollar 14 aus Kapitel 1 der Vorlesung noethersch und jede Untergruppe von $\mathbb{Q}^2$ endlich erzeugt. Die Untergruppe $\mathbb{Q} \times \{0\}$ ist aber isomorph zu $\mathbb{Q}$ und damit nach Aufgabe 2.2 a) nicht endlich erzeugt. $\lightning$

Behauptung: $\mathbb{Q}$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{Q}^2$.

Beweis: Per Widerspruch: Angenommen, $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^2$. Sei $\varphi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ ein Isomorphismus. Betrachte die Einschränkung von φ auf die Untergruppe $\mathbb{Z}^2$ von $\mathbb{Q}^2$. Seien $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\varphi(1,0) = \frac{a}{b}$ und $\varphi(0,1) = \frac{c}{d}$. Da φ injektiv ist, gilt $a \neq 0$ und $c \neq 0$. Damit gilt aber $bc \neq 0$ und $ad \neq 0$, also $(bc, -ad) \neq (0,0)$ in $\mathbb{Z}^2$. Es gilt jedoch:

$$\begin{aligned} \varphi(bc, -ad) &= \varphi(bc(1,0) - ad(0,1)) = bc \cdot \varphi(1,0) - ad \cdot \varphi(0,1) \\ &= bc\frac{a}{b} - ad\frac{c}{d} = ac - ac = 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von φ. $\lightning$

Behauptung: $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$

Beweis: Betrachte $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$. Dann ist B (überabzählbar) unendlich. Also existiert eine Bijektion zwischen B und $B \times \{1,2\}$. Aber offenbar ist die Menge

$$\{(b,0) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in B\} \cup \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in B\}$$

eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}^2$. Diese ist gleichmächtig zu $B \times \{1,2\}$ und damit gleichmächtig zu B. Schließlich sind also $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume der gleichen Dimension und folglich isomorph als Vektorräume über $\mathbb{Q}$. Insbesondere sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ isomorph als abelsche Gruppen.