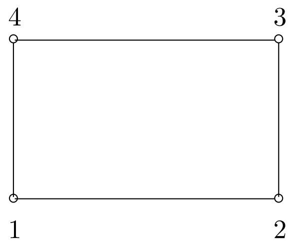
2. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie “
Musterlösung

Aufgabe 2.1
Sei G die Symmetriegruppe eines nicht-quadratischen Rechtecks:



a) Bestimme die Ordnung von G.

b) Sei $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(4)$ der durch die Wirkung von G auf der Eckenmenge induzierte Gruppenhomomorphismus. Was ist das Bild von G unter φ? Wirkt G transitiv auf den Ecken? Wirkt G 2-fach transitiv?

Lösung:

a) Sei m der Mittelpunkt des Rechtecks. Offensichtlich enthält G die folgenden Symmetrien: die Identität id, die Achsenspiegelung r_v an der vertikalen Seitenhalbierenden, die Achsenspiegelung r_h an der horizontalen Seitenhalbierenden sowie die Punktspiegelung r_m am Punkt m. Folglich hat G mindestens Ordnung $\#G \geq 4$.
Wir zeigen nun, dass auch $\#G \leq 4$ gilt, d.h. dass G außer den oben beschriebenen keine weiteren Abbildungen enthält.
Da jede Symmetrie die Abstände erhält, bilden Elemente aus G die Ecken auf Ecken ab (denn die Ecken des Rechtecks sind genau die Punkte mit maximalem Abstand zu m), d.h. wir haben eine wohldefinierte Wirkung von G auf der Eckenmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ des Rechtecks.
Sei nun $\alpha \in G$ mit $\alpha(1) = 1$. Da α Abstände erhält, fixiert α auch die 1 gegenüberliegende Ecke, d.h. $\alpha(3) = 3$. Da das Rechteck nicht quadratisch ist, sind die Abstände $d(1, 2)$ und $d(1, 4)$ verschieden. Somit gilt $\alpha(2) \neq 4$ und damit $\alpha(2) = 2, \alpha(4) = 4$. Insgesamt hält α also alle Ecken (und damit auch alle Seiten) fest und es gilt $\varphi = \mathrm{id}$.
Nun ist aber eine Symmetrie $\beta \in G$ eindeutig durch das Bild $\beta(1)$ bestimmt. Denn für $\beta, \beta' \in G$ gilt:

$$\beta(1) = \beta'(1) \Rightarrow \beta^{-1}\beta'(1) = 1 \Rightarrow \beta^{-1}\beta' = \mathrm{id} \Rightarrow \beta = \beta'$$

Wegen $\beta(1) \in \{1, 2, 3, 4\}$ gibt es höchstens 4 Möglichkeiten und es folgt $\#G \leq 4$ und damit $\#G = 4$.

b) Da $\mathrm{id} \in G$ trivial operiert, gilt $\varphi(\mathrm{id}) = \mathrm{id} \in \mathrm{Sym}(4)$. Die Achsenspiegelung r_v vertauscht die Ecken 1 und 2 sowie 3 und 4, d.h. $\varphi(r_v) = (12)(34)$.

Die Achsenspiegelung r_h vertauscht die Ecken 1 und 4 sowie 2 und 3, d.h. $\varphi(r_h) = (14)(23)$. Die Punktspiegelung r_m bildet jede Ecke auf die gegenüberliegende ab, d.h. $\varphi(r_m) = (13)(24)$. Das Bild von G unter φ ist damit die Menge

$$\varphi(G) = \{\mathrm{id}, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}.$$

Da die Bahn der Ecke 1

$$G(1) = \{\mathrm{id}(1), r_v(1), r_h(1), r_m(1)\} = \{1, 2, 4, 3\}$$

alle Ecken enthält, ist die Wirkung von G auf der Eckenmenge transitiv. Aus dem Beweis von Teil a) wissen wir $G_{\{1\}} = \{\mathrm{id}\}$. Somit gibt es kein $\alpha \in G$ mit $\alpha(1,2) = (1,3)$, d.h. die Wirkung von G ist nicht 2-transitiv.

Aufgabe 2.2

a) Beweise: Die additive Gruppe der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +)$ ist nicht endlich erzeugt.

b) Seien G, H nicht-triviale Gruppen. Zeige: Das freie Produkt $G * H$ ist unendlich.

Lösung:

a) Per Widerspruch: Angenommen, $\mathbb{Q}$ sei endlich erzeugt. Sei $\{q_1, \ldots, q_m\}$ eine endliche Erzeugermenge von $\mathbb{Q}$. Seien weiter $k_i \in \mathbb{Z}, n_i \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $q_i = \frac{k_i}{n_i}$ für $i = 1, \ldots, m$. Sei p eine Primzahl mit $p > n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$.
Dann liegt $\frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$ im Erzeugnis der q_i. Da $\mathbb{Q}$ abelsch ist, existieren damit $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{1}{p} = \sum\limits_{i=1}^{m} s_i \cdot q_i$. Durch Erweitern auf den Hauptnenner $n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$ erhalten wir:

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{m} s_i \cdot q_i = \sum_{i=1}^{m} s_i \cdot \frac{k_i}{n_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (s_i \cdot k_i \cdot \prod\limits_{j \neq i} n_j)}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_m}$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \cdot \ldots \cdot n_m = p \cdot (\sum_{i=1}^{m} s_i \cdot k_i \cdot \prod_{j \neq i} n_j)$$

Damit teilt aber p das Produkt $n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$ im Widerspruch zu $p > n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$. ↯ $\mathbb{Q}$ ist also nicht endlich erzeugt.

b) Seien $a \in G \setminus \{e_G\}, b \in H \setminus \{e_H\}$. Betrachte in $G * H$ Elemente der Form $w_1 = a, w_2 = ab, w_3 = aba, w_4 = abab$ usw.
Wir definieren allgemein für $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$:

$$w_k = \begin{cases} (ab)^{\frac{k-1}{2}} a & , \ k \text{ ungerade} \\ (ab)^{\frac{k}{2}} & , \ k \text{ gerade} \end{cases}$$

Betrachten wir $w_k = (w_{1k}, \ldots, w_{kk})$ als Wort über dem Alphabet $G \cup H$, so gilt $w_{ik} = a \in G$, falls i ungerade und $w_{ik} = b \in H$, falls i gerade ist.

Wegen $a \neq e_G$ und $b \neq e_H$ ist w_k damit ein reduziertes Wort der Länge k. Folglich sind die $(w_j)_{j \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ paarweise verschiedene Elemente in $G * H$ und die Gruppe $G * H$ ist unendlich.

Aufgabe 2.3
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und A eine endliche Gruppe. Zeige:

a) Die Menge der Gruppenhomomorphismen $\mathrm{Hom}(G, A)$ ist endlich.

b) Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Dann hat G nur endlich viele Untergruppen von Index $[G : H] = n$.

Lösung:

a) Sei X eine endliche Erzeugermenge von G. Wir zeigen, dass ein Homomorphismus von G nach A eindeutig durch das Bild auf X festgelegt wird.
Seien also $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(G, A)$ mit $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in X$.
Zu zeigen: $\varphi = \psi$
Sei $g \in G$ beliebig. Da X die Gruppe G erzeugt, gibt es $k \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_k \in X$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{1, -1\}$ mit $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\varepsilon_k}$. Da φ und ψ Homomorphismen sind, gilt dann:

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= \varphi(x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\varepsilon_k}) = \varphi(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \varphi(x_k)^{\varepsilon_k} \\ &= \psi(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \psi(x_k)^{\varepsilon_k} = \psi(x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\varepsilon_k}) = \psi(g)\end{aligned}$$

$g \in G$ war beliebig gewählt und somit gilt $\varphi = \psi$.
Da ein Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, A)$ eindeutig durch das Bild $\varphi(X)$ festgelegt ist, haben wir:

$$\#\mathrm{Hom}(G, A) \leq \#\mathrm{Abb}(X, A) = (\#A)^{\#X} < \infty$$

b) Für jede Untergruppe $H \leq G$ mit $[G : H] = n$ können wir die Menge der Linksnebenklassen G/H mit der Menge $\{1, \ldots, n\}$ identifizieren, wobei der Nebenklasse $H = eH$ das Element 1 zugeordnet werden soll.
Mit dieser (fest gewählten!) Identifikation induziert die Linkswirkung von G auf G/H einen Gruppenhomomorphismus $\varphi_H : G \to \mathrm{Sym}(n)$.
Da $\mathrm{Sym}(n)$ endlich ist, gibt es nach Teil a) nur endlich viele solche Homomorphismen φ_H.
Der Stabilisator $G_{\{1\}}$ bezüglich eines solchen Homomorphismus φ_H ist genau der Stabilisator der Linksnebenklasse $H \in G/H$, also die Untergruppe H. Gilt nun für Untergruppen $H, H' \leq G$ von Index n die Gleichheit $\varphi_H = \varphi_{H'}$, so stimmen die Stabilisatoren von 1 bezüglich der beiden Wirkungen überein und es gilt somit $H = H'$.
Folglich hat G höchstens $\#\mathrm{Hom}(G, \mathrm{Sym}(n)) < \infty$ Untergruppen H von Index $[G : H] = n$.

Aufgabe 2.4
Zeige: Es gibt keine Gruppe G, deren Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch

von ungerader Ordnung $n > 1$ ist.

Lösung: Per Widerspruch: Angenommen, G sei eine Gruppe, sodass $\mathrm{Aut}(G)$ eine zyklische Gruppe ungerader Ordnung $n > 1$ ist.
Die Lösung ist in drei Schritte unterteilt:
1. Behauptung: G ist abelsch.
Beweis: Bezeichne $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$ die Untergruppe der inneren Automorphismen von G. Als Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist $\mathrm{Inn}(G)$ zyklisch.
Sei $g \in G$, sodass $c_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$ die Gruppe $\mathrm{Inn}(G)$ erzeugt.
Sei nun $h \in H$ beliebig und $c_h : G \to G, x \mapsto hxh^{-1}$ die Konjugation mit h. Da c_g ein Erzeuger von $\mathrm{Inn}(G)$ ist, gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $c_h = c_g^k$, d.h. für alle $x \in G$ gilt $hxh^{-1} = c_h(x) = c_g^k(x) = g^k x g^{-k}$. Insbesondere gilt für g:

$$hgh^{-1} = g^k g g^{-k} = g \Rightarrow hg = gh$$

Da g mit h kommutiert und $h \in G$ beliebig war, folgt $g \in Z(G)$. Dann ist aber $c_g = \mathrm{id}_G$ ein Erzeuger von $\mathrm{Inn}(G)$, d.h. $\mathrm{Inn}(G)$ ist trivial. Dies bedeutet, dass jede Konjugationsabbildung auf G die Identität ist. G ist somit abelsch.
2. Behauptung: Alle Elemente in $G \setminus \{e\}$ haben Ordnung 2.
Beweis: Da G abelsch ist, ist die Abbildung $i : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ nach Aufgabe 1.1 ein Gruppenhomomorphismus. i ist offenbar selbstinvers, also insbesondere ein Automorphismus von G und es gilt $\mathrm{ord}(i) \leq 2$. Da $\mathrm{Aut}(G)$ von ungerader Ordnung ist, gilt $\mathrm{ord}(i) \neq 2$ und damit $\mathrm{ord}(i) = 1$, d.h. $i = \mathrm{id}_G$.
Das heißt aber genau, dass jedes Element in G selbstinvers ist und alle Elemente $g \in G$ mit $g \neq e$ Ordnung 2 haben. Damit können wir G als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ auffassen.
3. Widerspruch: Wegen $\mathrm{Aut}(\{0\}) = \{\mathrm{id}\}$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2) = \{\mathrm{id}\}$ sowie $\#G = n > 1$ hat G mindestens Dimension 2 als Vektorraum über $\mathbb{F}_2$.
Ein 2-dimensionaler Vektorraum hat aber nicht-kommutierende Automorphismen. (Genauer kann man $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Sym}(3)$ zeigen.)
Betrachte dafür zum Beispiel die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Da wir jeden Automorphismus eines 2-dimensionalen Unterraums auf G fortsetzen können, enthält $\mathrm{Aut}(G)$ nicht-kommutierende Automorphismen. Andererseits ist $\mathrm{Aut}(G)$ als zyklische Gruppe insbesondere abelsch. $\lightning$
Somit war die Annahme falsch und es gibt keine Gruppe G, deren Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch von ungerader Ordnung $n > 1$ ist.

***-Aufgabe**
Sei G eine topologische Gruppe und $A \leq G$ eine Untergruppe. Zeige:

a) Ist A offen in G, so ist A auch abgeschlossen. Gilt dies auch umgekehrt?

b) Der Abschluss $\bar{A}$ von A in G ist eine Untergruppe von G.
Ist $A \trianglelefteq G$ normal, so ist auch $\bar{A}$ ein Normalteiler von G.

Lösung:

a) Sei A offen in G. Da für $g \in G$ die Abbildung $t_g : G \to G, x \mapsto gx$ stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung $t_{g^{-1}}$, also ein Homöomorphismus von G ist, sind alle Nebenklassen gA offen in G.

Nun ist $G \setminus A = \bigcup_{g \in G \setminus A} gA$ als Vereinigung offener Mengen offen in G, d.h. A ist eine abgeschlossene Teilmenge von G.
Eine abgeschlossene Untergruppe ist im Allgemeinen nicht offen. Betrachte die additive Gruppe $(\mathbb{R}, +)$, wobei $\mathbb{R}$ mit der (durch die Betragsmetrik induzierten) Standardtopologie versehen sei. Da Addition und Inversenbildung stetig sind, ist $\mathbb{R}$ eine topologische Gruppe. Die triviale Untergruppe $\{0\}$ ist abgeschlossen, aber nicht offen in $\mathbb{R}$.

b) Wir verwenden folgende Charakterisierung des Abschlusses:

$$\bar{A} = \{g \in G \mid \forall U \subseteq G : (U \text{ offen} \land g \in U) \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset\}$$

In Worten: Der Abschluss $\bar{A}$ von A besteht aus den Punkten von G, für die A jede ihrer offenen Umgebungen nicht-leer schneidet.
Es gilt $e \in A \subseteq \bar{A}$. Seien $x, y \in \bar{A}$.
Zu zeigen: $xy \in \bar{A}$
Sei U eine offene Umgebung von xy. Da m stetig ist, ist $m^{-1}(U)$ offen in $G \times G$ und enthält (x, y). Da die Menge $\{V_1 \times V_2 \mid V_1, V_2 \subseteq G \text{ offen}\}$ eine Basis der Produkttopologie auf $G \times G$ ist, gibt es offene Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq G$ mit $(x, y) \in U_1 \times U_2 \subseteq m^{-1}(U)$. Also gilt $x \in U_1, y \in U_2$ und nach der obigen Charakterisierung von $\bar{A}$ erhalten wir $U_1 \cap A \neq \emptyset$ sowie $U_2 \cap A \neq \emptyset$. Seien $x' \in U_1 \cap A, y' \in U_2 \cap A$.
Da A eine Untergruppe ist, gilt $x'y' \in A$. Weiter: $(x', y') \in U_1 \times U_2 \subseteq m^{-1}(U)$
Somit gilt: $x'y' = m(x', y') \in U$ Insbesondere schneidet A die Menge U nicht-leer und daher gilt $xy \in \bar{A}$.
Zu zeigen: $x^{-1} \in \bar{A}$
Sei U eine offene Umgebung von x^{-1}. Da i stetig ist, ist $i^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von x. Wegen $x \in \bar{A}$ gibt es $a \in i^{-1}(U) \cap A$. Als Untergruppe ist A unter Inversenbildung abgeschlossen und es gilt $a^{-1} = i(a) \in U \cap A$. Insbesondere gilt $U \cap A \neq \emptyset$ und damit $x^{-1} \in \bar{A}$.
Da $\bar{A}$ das neutale Element enthält und unter Multiplikation sowie Inversenbildung abgeschlossen ist, ist $\bar{A}$ eine Untergruppe von G.
Sei nun A normal in G. Zu zeigen: $\bar{A} \trianglelefteq G$
Sei $x \in \bar{A}, g \in G$. Sei U eine offene Umgebung von gxg^{-1}. Die Abbildung $c_g : G \to G, y \mapsto gyg^{-1}$ ist stetig. Somit ist $c_g^{-1}(U)$ offen und enthält das Element x. Wegen $x \in \bar{A}$ existiert $a \in c_g^{-1}(U) \cap A$. Dann gilt $gag^{-1} = c_g(a) \in U$ und $gag^{-1} \in A$, da A normal in G ist. Insgesamt liefert das $gag^{-1} \in U \cap A$, d.h. $U \cap A \neq \emptyset$ und es gilt $gag^{-1} \in \bar{A}$.
Somit ist $\bar{A}$ ein Normalteiler von G.