9. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 9.1
Sei K ein Körper mit Teilringen A, B und C so, dass $A \subseteq B \subseteq C$ gilt. Zeige: Ist C ganz über B (d.h. jedes Element in C ist ganz über B) und B ganz über A, so ist C ganz über A.

Hinweis: Benutze wieder den Hinweis zu Aufgabe 7.4, d.h. dass ein Element $c \in C$ genau dann ganz über A ist, wenn es einen Teilring $S \subseteq C$ gibt, welcher A und c enthält und als A-Modul endlich erzeugt ist.

Aufgabe 9.2
Sei R ein kommutativer Ring und $G \subseteq \mathrm{Aut}(R)$ eine endliche Gruppe von Ringautomorphismen von R. Sei

$$R^G := \{x \in R \mid \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in G\}$$

der Unterring der G-Invarianten in R. Zeige: R ist ganz über R^G.

Aufgabe 9.3
Sei R ein kommutativer Ring und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Dann definieren wir das *Radikal* von I in R als $\mathrm{rad}(I) := \{x \in R \mid x^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$.
Zeige: $\mathrm{rad}(I)$ ist ein Ideal in R. Was ist das Radikal des Nullideals?

Aufgabe 9.4
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f_1, \ldots, f_r \in K[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome in n Variablen über K. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Die Polynome $f_1, \ldots, f_r$ haben eine gemeinsame Nullstelle, d.h. es gibt $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ mit $f_i(x) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$.

ii) Das von den f_i erzeugte Ideal $(f_1, \ldots, f_r)$ ist ein echtes Ideal, d.h. $(f_1, \ldots, f_r) \neq K[X_1, \ldots, X_n]$.

Bitte wenden.

***-Aufgabe**
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathfrak{a} \trianglelefteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein echtes Ideal und $X \subseteq K^n$ eine Teilmenge.

a) Setze

$$I(X) := \{p \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid p(x) = 0 \text{ für alle } x \in X\}.$$

Zeige: $I(X)$ ist ein Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$.

b) Sei $V(\mathfrak{a})$ die durch $\mathfrak{a}$ definierte *algebraische Varietät*, d.h.

$$V(\mathfrak{a}) = \{x \in K^n \mid p(x) = 0 \text{ für alle } p \in \mathfrak{a}\}.$$

Zeige: $I(V(\mathfrak{a})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$

Hinweis: Konstruiere in Teil b) für die Inklusion $I(V(\mathfrak{a})) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ eine Menge von Polynomen, die keine gemeinsame Nullstelle besitzen, und benutze die Aufgabe 9.4.

Abgabe bis: Donnerstag, den 23.6.2016, 8 Uhr