7. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016 Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 7.1
Sei A ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Zeige:

$$\mathrm{GL}_n(A) \cong \mathrm{SL}_n(A) \rtimes A^*$$

Aufgabe 7.2
Sei A ein kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$ und $S, T \in A^{n\times n}$. Zeige: Gilt $ST = 1$, so gilt auch $TS = 1$.

Aufgabe 7.3
Sei R ein Ring, $I \trianglelefteq R$ ein Ideal und K ein Körper. Zeige:

a) I ist genau dann ein maximales Ideal, wenn R/I ein Körper ist.

b) I ist genau dann ein Primideal, wenn R/I ein Integritätsbereich ist.

c) Ist $z \in R$ nilpotent (d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $z^n = 0$), so ist $1-z$ invertierbar.

d) K ist genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn K keine echte, endliche Körpererweiterung besitzt.

Aufgabe 7.4
Sei K ein Körper und $R \subseteq K$ ein Teilring. Dann bilden die über R ganzen Elemente in K einen Teilring.
Erinnerung: Ein Element $x \in K$ heißt *ganz über* R, wenn es ein normiertes Polynom $p \in R[X]$ mit $p(x) = 0$ gibt.

Hinweis: Zeige, dass x genau dann ganz über R ist, wenn es einen Teilring $C \subseteq K$ gibt, welcher R und x enthält und als R-Modul endlich erzeugt ist.

Bitte wenden.

Definition: Sei R ein Ring. Wir sagen, R hat *invariante Basislänge*, wenn aus $R^n \cong R^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ schon $n = m$ folgt.

***-Aufgabe**
Sei A ein kommutativer Ring. Zeige: A hat invariante Basislänge.

Hinweis: Zeige, dass für Matrizen $a \in R^{n\times m}, b \in R^{m\times n}$ mit $ab = 1_n$ und $ba = 1_m$ schon $n = m$ gilt.

Abgabe bis: Donnerstag, den 9.6.2016, 8 Uhr