6. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 6.1
Sei G eine polyzyklische Gruppe. Zeige:

a) Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist H polyzyklisch.

b) Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, so ist G/N polyzyklisch.

Aufgabe 6.2
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und G eine endliche p-Gruppe der Ordnung p^n. Zeige, dass G für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ eine Untergruppe der Ordnung p^k enthält.

Aufgabe 6.3
Sei G eine endlich erzeugte, nilpotente Gruppe. Zeige: Es gibt eine endliche, nilpotente Gruppe F und eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe H, sodass G isomorph zu einer Untergruppe des direkten Produkts $F \times H$ ist.
Hinweis: Betrachte geeignete Quotienten von G und verwende, dass G nach Theorem 18 aus Kapitel 2 einen torsionsfreien Normalteiler von endlichem Index enthält.

Definition: Seien E und N Gruppen sowie $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$ eine Gruppenwirkung von E auf N durch Automorphismen. Dann definieren wir das *semi-direkte Produkt* von N mit E bzgl. φ, geschrieben $N \rtimes E = N \rtimes_\varphi E$, wie folgt:
Als Menge sei $N \rtimes E = N \times E$ das kartesische Produkt von N und E. Zudem erklären wir eine Verknüpfung durch

$$(n_1, e_1) \cdot (n_2, e_2) := (n_1\varphi(e_1)(n_2), e_1e_2),$$

wobei eintragsweise in den Gruppen N bzw. E multipliziert wird.

Bitte wenden.

Aufgabe 6.4
Seien E, N und $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$ wie in voriger Definition. Zeige:

a) Das semi-direkte Produkt $N \rtimes E$ ist eine Gruppe, die E als Untergruppe und N als Normalteiler enthält.

b) Ist G eine Gruppe mit Untergruppen E und N, sodass $N \trianglelefteq G$, $G = NE$ und $N \cap E = \{1\}$ gilt, so ist G isomorph zu einem semi-direkten Produkt $N \rtimes_\varphi E$ für einen geeigneten Homomorphismus $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$.

***-Aufgabe**
Welche der folgenden Gruppen lassen sich als semi-direktes Produkt $N \rtimes E$ mit $N \neq \{1\}, E \neq \{1\}$ schreiben?

a) $\mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z}^2$

c) $\mathrm{Sym}(n)$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

d) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Abgabe bis: Donnerstag, den 2.6.2016, 8 Uhr