6. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“
Musterlösung

SoSe 2016 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 6.1
Sei G eine polyzyklische Gruppe. Zeige:

a) Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist H polyzyklisch.

b) Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, so ist G/N polyzyklisch.

Lösung: Da G polyzyklisch ist, besitzt G eine Normalreihe

$$\{1\} = G_m \subseteq G_{m-1} \subseteq \ldots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

mit zyklischen Faktoren G_i/G_{i+1} für $i = 0, \ldots, m-1$.

a) Setze $H_i := H \cap G_i$. Dann ist $H_0 = H \cap G = H$ und $H_m = H \cap \{1\} = \{1\}$. Wegen $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ gilt $H_{i+1} \trianglelefteq H_i$, d.h. die H_i bilden eine Normalreihe von H. Noch zu zeigen: Die Faktorgruppen H_i/H_{i+1} sind zyklisch für $i = 0, \ldots, m-1$.
Sei $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ beliebig. Betrachte die Komposition

$$\pi \circ \iota : H_i \hookrightarrow G_i \to G_i/G_{i+1},$$

wobei ι die Inklusion und π die kanonische Projektion auf G_i/G_{i+1} sei. Für den Kern gilt:

$$\ker(\pi \circ \iota) = \iota^{-1}(\ker(\pi)) = \iota^{-1}(G_{i+1}) = H \cap G_{i+1} = H_{i+1}$$

Nach dem Homomorphiesatz erhalten wir einen induzierten Monomorphismus $H_i/H_{i+1} \to G_i/G_{i+1}$. Mit anderen Worten ist H_i/H_{i+1} isomorph zu einer Untergruppe von G_i/G_{i+1}. Da G_i/G_{i+1} zyklisch ist, ist H_i/H_{i+1} daher als Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch.
Da H eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren besitzt, ist H polyzyklisch.

b) Definiere $Q_i := G_iN/N \subseteq G/N$. Da N normal in G ist, ist G_iN für jedes $i = 0, \ldots, m$ eine Untergruppe von G und Q_i als Bild von G_iN unter der kanonischen Projektion $\pi : G \to G/N$ damit eine Untergruppe von G/N. Desweiteren gilt $Q_0 = GN/N = G/N$ und $Q_m = \{1\}N/N = \{1\} \subseteq G/N$. Wir zeigen nun, dass

$$\{1\} = Q_m \subseteq Q_{m-1} \subseteq \ldots \subseteq Q_1 \subseteq Q_0 = G/N$$

eine Normalreihe von G/N mit zyklischen Faktoren ist.
Sei $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ beliebig. Zu zeigen: $Q_{i+1} \trianglelefteq Q_i$
Nach Konstruktion gilt $G_iN = \pi^{-1}(Q_i)$. Daher genügt es zu beweisen,

dass $G_{i+1}N \trianglelefteq G_iN$ gilt. Seien $x \in G_{i+1}N, y \in G_iN$ beliebig. Dann gibt es $x' \in G_{i+1}, n_x \in N$ mit $x = x'n_x$ und $y' \in G_i, n_y \in N$ mit $y = y'n_y$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} yxy^{-1} &= y(x'n_x)y^{-1} = yx'y^{-1} \cdot yn_xy^{-1} \\ &= y'n_yx'(y'n_y)^{-1} \cdot yn_xy^{-1} \\ &= y'n_yx'n_y^{-1}y'^{-1} \cdot yn_xy^{-1} \\ &= y'n_yy'^{-1} \cdot y'x'y'^{-1} \cdot y'n_y^{-1}y'^{-1} \cdot yn_xy^{-1} \end{aligned}$$

Da N ein Normalteiler in G ist, sind $y'n_yy'^{-1}, y'n_y^{-1}y'^{-1}$ und yn_xy^{-1} in N enthalten. Wegen $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ gilt zudem $y'x'y'^{-1} \in G_{i+1}$. Damit ist yxy^{-1} enthalten in der von N und G_{i+1} erzeugten Gruppe $G_{i+1}N$, d.h. $G_{i+1}N \trianglelefteq G_iN$.
Es bleibt zu zeigen: Alle Faktorgruppen Q_i/Q_{i+1} sind zyklisch.
Sei $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ beliebig. Betrachte die Komposition

$$p \circ \iota : G_i \hookrightarrow G_iN \to G_iN/G_{i+1}N,$$

wobei ι die Inklusion und p die kanonische Projektion $G_iN \to G_iN/G_{i+1}N$ sei. Dann ist $p \circ \iota$ surjektiv und hat den Kern $G_{i+1}N \cap G_i$. Nach dem Homomorphiesatz erhalten wir also folgende Kette von Isomorphismen:

$$G_i/(G_{i+1}N \cap G_i) \cong G_iN/G_{i+1}N \cong (G_iN/N)/(G_{i+1}N/N) = Q_i/Q_{i+1}$$

Wegen $G_{i+1} \subseteq G_{i+1}N \cap G_i$ erhalten wir wiederum nach dem Homomorphiesatz einen Epimorphismus $G_i/G_{i+1} \to G_i/(G_{i+1}N \cap G_i) \cong Q_i/Q_{i+1}$. Somit ist Q_i/Q_{i+1} als Quotient der zyklischen Gruppe G_i/G_{i+1} zyklisch. Die Q_i bilden eine Normalreihe von G/N mit zyklischen Faktoren und G/N ist polyzyklisch.

Aufgabe 6.2
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und G eine endliche p-Gruppe der Ordnung p^n. Zeige, dass G für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ eine Untergruppe der Ordnung p^k enthält.

Lösung: Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist G (zyklisch) von Ordnung p und hat damit Untergruppen der Ordnung p (die gesamte Gruppe) und der Ordnung 1 (die triviale Untergruppe).
Induktionsschritt: Sei die Aussage bewiesen für alle Gruppen von Ordnung $\leq p^n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für eine Gruppe G der Ordnung p^{n+1}:
Als p-Gruppe ist G nach Lemma 4 aus Kapitel 2 der Vorlesung nilpotent. Somit gilt $Z(G) \neq \{1\}$. Sei $m \leq n+1$ mit $\#Z(G) = p^m$. Sei $k \leq n+1$ beliebig.
Gilt $m = n+1$, also $Z(G) = G$, so ist G abelsch. Dann ist G nach dem Struktursatz für endlich erzeugte, abelsche Gruppen ein direktes Produkt von zyklischen p-Gruppen. Da eine zyklische Gruppe der Ordnung r für jeden Teiler s von r eine (eindeutige) Untergruppe der Ordnung s besitzt, sieht man mithilfe der Produktzerlegung von G leicht, dass G eine Untergruppe der Ordnung p^k besitzt.
Andernfalls ist $m < n+1$. Gilt $k \leq m$, so enthält $Z(G)$ nach Induktionsvoraussetzung eine Untergruppe der Ordnung p^k. Ohne Einschränkung sei also $k > m$.

Betrachte nun die Gruppe $G/Z(G)$. Wegen $\#G/Z(G) = p^{n+1-m} \leq p^n$ hat $G/Z(G)$ nach Induktionsvoraussetzung eine Untergruppe $\tilde{H}$ mit $\#\tilde{H} = p^{k-m}$. Da das Urbild $\pi^{-1}(x)$ bzgl. der kanonischen Projektion $\pi : G \to G/Z(G)$ für jedes $x \in G/Z(G)$ genau $\#Z(G) = p^m$ Elemente enthält, hat die Untergruppe $H := \pi^{-1}(\tilde{H})$ genau $p^m \cdot \#\tilde{H} = p^m \cdot p^{k-m} = p^k$ Elemente.
Somit besitzt G eine Untergruppe der Ordnung p^k für jedes $k \leq n+1$ und es folgt die Behauptung.

Aufgabe 6.3
Sei G eine endlich erzeugte, nilpotente Gruppe. Zeige: Es gibt eine endliche, nilpotente Gruppe F und eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe H, sodass G isomorph zu einer Untergruppe des direkten Produkts $F \times H$ ist.

Lösung: Nach Theorem 11 in Kapitel 2 der Vorlesung bilden die Torsionselemente tG eine charakteristische Untergruppe und $H := G/tG$ ist torsionsfrei.
Weiter existiert nach Theorem 18 aus Kapitel 2 der Vorlesung ein torsionsfreier Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $[G : N] < \infty$. Da N endlichen Index in G hat, ist die Quotientengruppe $F := G/N$ endlich.
Als Quotienten der nilpotenten Gruppe G sind die Gruppen $F = G/N$ und $H = G/tG$ ebenfalls nilpotent. Somit ist F endlich, nilpotent und H torsionsfrei, nilpotent und es genügt einen Monomorphismus $\iota : G \to F \times H$ zu konstruieren.
Seien $\pi_1 : G \to G/N = F$ und $\pi_2 : G \to G/tG = H$ die kanonischen Projektionen. Definiere nun $\iota : G \to F \times H$ durch $\iota(g) = (\pi_1(g), \pi_2(g))$. Da π_1 und π_2 Homomorphismen sind, ist ι ein Homomorphismus. Weiter gilt:

$$\ker(\iota) = \ker(\pi_1) \cap \ker(\pi_2) = N \cap tG$$

Da N torsionsfrei ist, folgt $\ker(\iota) = N \cap tG = \{1\}$ und ι ist injektiv.
Damit ist G isomorph zu der Untergruppe $\iota(G) \subseteq F \times H$.

Aufgabe 6.4
Seien E, N und $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$ wie in voriger Definition. Zeige:

a) Das semi-direkte Produkt $N \rtimes E$ ist eine Gruppe, die E als Untergruppe und N als Normalteiler enthält.

b) Ist G eine Gruppe mit Untergruppen E und N, sodass $N \trianglelefteq G$, $G = NE$ und $N \cap E = \{1\}$ gilt, so ist G isomorph zu einem semi-direkten Produkt $N \rtimes_\varphi E$ für einen geeigneten Homomorphismus $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$.

Lösung:

a) Zunächst zeigen wir, dass die Verknüpfung auf $N \rtimes E$ assoziativ ist.

Seien $(n_1, e_1), (n_2, e_2), (n_3, e_3) \in N \rtimes E$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(n_1, e_1) \cdot ((n_2, e_2) \cdot (n_3, e_3)) &= (n_1, e_1) \cdot (n_2 \cdot \varphi(e_2)(n_3), e_2 e_3) \\
&= (n_1 \cdot \varphi(e_1)(n_2 \cdot \varphi(e_2)(n_3)), e_1 e_2 e_3) \\
&= (n_1 \cdot \varphi(e_1)(n_2) \cdot \varphi(e_1)(\varphi(e_2)(n_3)), e_1 e_2 e_3) \\
&= (n_1 \cdot \varphi(e_1)(n_2) \cdot \varphi(e_1 e_2)(n_3), e_1 e_2 e_3) \\
&= (n_1 \cdot \varphi(e_1)(n_2), e_1 e_2) \cdot (n_3, e_3) \\
&= ((n_1, e_1) \cdot (n_2, e_2)) \cdot (n_3, e_3)
\end{aligned}$$

Die Verknüpfung auf $N \rtimes E$ ist damit assoziativ.
Sei $(n, e) \in N \rtimes E$ beliebig. Dann gilt für $(1_N, 1_E) \in N \rtimes E$:

$$\begin{aligned}
(1_N, 1_E) \cdot (n, e) &= (1_N \cdot \varphi(1_E)(n), 1_E \cdot e) = (1_N \cdot n, 1_E \cdot e) = (n, e) \\
(n, e) \cdot (1_N, 1_E) &= (n \cdot \varphi(e)(1_N), e \cdot 1_E) = (n \cdot 1_N, e \cdot 1_E) = (n, e)
\end{aligned}$$

Somit ist $(1_N, 1_E)$ ein neutrales Element in $N \rtimes E$.
Weiter ist $(\varphi(e^{-1})(n^{-1}), e^{-1}) \in N \rtimes E$ invers zu (n, e). Dies zeigen folgende Rechnungen:

$$\begin{aligned}
(n, e) \cdot (\varphi(e^{-1})(n^{-1}), e^{-1}) &= (n \cdot \varphi(e)(\varphi(e^{-1})(n^{-1})), ee^{-1}) \\
&= (n \cdot \varphi(ee^{-1})(n^{-1}), 1_E) \\
&= (n \cdot \varphi(1_E)(n^{-1}), 1_E) \\
&= (nn^{-1}, 1_E) = (1_N, 1_E) \\
(\varphi(e^{-1})(n^{-1}), e^{-1}) \cdot (n, e) &= (\varphi(e^{-1})(n^{-1}) \cdot \varphi(e^{-1})(n), e^{-1}e) \\
&= (\varphi(e^{-1})(n^{-1}n), 1_E) \\
&= (\varphi(e^{-1})(1_N), 1_E) = (1_N, 1_E)
\end{aligned}$$

Insgesamt ist $N \rtimes E$ also eine Gruppe. Man rechnet leicht nach, dass $\{1_N\} \times E$ und $N \times \{1_E\}$ Untergruppen in $N \rtimes E$ sind, welche isomorph zu E bzw. N sind. (Die Isomorphismen sind die natürlichen Abbildungen $e \mapsto (1_N, e)$ bzw. $n \mapsto (n, 1_E)$.)
Es bleibt zu zeigen, dass $N \times \{1_E\}$ normal in $N \rtimes E$ ist.
Seien $(n', 1) \in N \times \{1_E\}$ und $(n, e) \in N \rtimes E$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(n, e) \cdot (n', 1_E) \cdot (n, e)^{-1} &= (n, e) \cdot (n', 1_E) \cdot (\varphi(e^{-1})(n^{-1}), e^{-1}) \\
&= (n \cdot \varphi(e)(n'), e) \cdot (\varphi(e^{-1})(n^{-1}), e^{-1}) \\
&= (n \cdot \varphi(e)(n') \cdot \varphi(e)(\varphi(e^{-1})(n^{-1})), ee^{-1}) \\
&= (n \cdot \varphi(e)(n') \cdot n^{-1}, 1_E) \in N \times \{1_E\}
\end{aligned}$$

Folglich gilt $N \times \{1_E\} \trianglelefteq N \rtimes E$.

b) Definiere $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$ durch die Konjugationswirkung von E auf $N \trianglelefteq G$, d.h. $\varphi(e)(n) = ene^{-1}$ für $e \in E, n \in N$. Wir zeigen nun, dass G isomorph zum semi-direkten Produkt von N mit E bzgl. φ ist.
Definiere $\alpha : N \rtimes E \to G, (n, e) \mapsto n \cdot e$, wobei das Produkt in G gemeint ist. Sind $(n, e), (n', e') \in N \rtimes E$ beliebig, so gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha(n, e) \cdot \alpha(n', e') &= n \cdot e \cdot n' \cdot e' = n \cdot (en'e^{-1}) \cdot e \cdot e' \\
&= \alpha(n \cdot (en'e^{-1}), ee') = \alpha(n \cdot \varphi(e)(n'), ee') \\
&= \alpha((n, e) \cdot (n', e'))
\end{aligned}$$

Somit ist α ein Gruppenhomomorphismus. Das Bild von α ist offenbar NE. Nach der Voraussetzung $NE = G$ ist α daher surjektiv.
Um zu zeigen, dass α injektiv ist, zeigen wir $\ker(\alpha) = \{1\}$.
Sei $(n, e) \in \ker(\alpha)$ beliebig. Dann gilt $1 = \alpha(n, e) = n \cdot e$, d.h. $n = e^{-1}$. Damit sind n und e enthalten in $N \cap E = \{1\}$. Also gilt $n = 1 = e$ und $(n, e) = (1, 1) = 1_{N \rtimes E}$. Da der Kern von α trivial ist, ist α injektiv.
Insgesamt ist α ein Isomorphismus und G somit isomorph zu dem semi-direkten Produkt $N \rtimes E$.

***-Aufgabe**

Welche der folgenden Gruppen lassen sich als semi-direktes Produkt $N \rtimes E$ mit $N \neq \{1\}, E \neq \{1\}$ schreiben?

a) $\mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z}^2$

c) $\mathrm{Sym}(n)$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

d) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Lösung:

a) Für alle Untergruppen $N, E \subseteq \mathbb{Z}$ mit $N \neq \{0\}, E \neq \{0\}$ gilt $N \cap E \neq \{0\}$. Somit ist $\mathbb{Z}$ kein nicht-triviales, semi-direktes Produkt.

b) $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist als direktes Produkt insbesondere ein semi-direktes Produkt (bzgl. der trivialen Wirkung).

c) $\mathrm{Sym}(1) = \{1\}$ und $\mathrm{Sym}(2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ haben keine echten nicht-trivialen Untergruppen und sind somit keine semi-direkten Produkte.
Für $n \geq 3$ ist $\mathrm{Alt}(n) \trianglelefteq \mathrm{Sym}(n)$ ein nicht-trivialer Normalteiler von Index 2. Weiter lässt sich jedes Element aus $\mathrm{Sym}(n)$ als Produkt $\alpha \circ (12)^k$ mit $\alpha \in \mathrm{Alt}(n)$ und $k \in \{0, 1\}$ schreiben.
Nach Aufgabe 6.4 b) ist $\mathrm{Sym}(n)$ also das semi-direkte Produkt der Gruppe $\mathrm{Alt}(n)$ mit der Gruppe $\langle (12) \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, also $\mathrm{Sym}(n) \cong \mathrm{Alt}(n) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) Ist n eine Primzahlpotenz, so sind die Untergruppen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bzgl. Inklusion total geordnet. Insbesondere schneiden sich nicht-triviale Untergruppen damit nicht-trivial und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist kein semi-direktes Produkt.
Andernfalls gibt es teilerfremde $l, k \in \mathbb{N}$ mit $l, k \geq 2$ und $n = l \cdot k$. Dann ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ ein direktes Produkt und lässt sich somit als nicht-triviales, semi-direktes Produkt schreiben.