4. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 4.1
Sei G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. Zeige: G ist residuell endlich.
Erinnerung: Eine Gruppe G heißt residuell endlich, wenn es zu jedem $g \in G \setminus \{1\}$ einen Homomorphismus $\varphi : G \to H$ in eine endliche Gruppe H mit $\varphi(g) \neq 1$ gibt.

Aufgabe 4.2
Sei G eine Gruppe und $A, B \subseteq G$ Untergruppen. Zeige: Die Gruppe

$$[A, B] = \langle \{[a, b] \mid a \in A, b \in B\} \rangle$$

ist ein Normalteiler in der von A und B erzeugten Untergruppe $\langle A \cup B \rangle$.

Aufgabe 4.3
Wir definieren die Quaternionengruppe Q als

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\} \subseteq \mathbb{H} \setminus \{0\}$$

mit den Rechenregeln $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ und $ij = k = -ji$.
(Natürlich gelten weiterhin die „offensichtlichen“ Regeln $1 \cdot x = x = x \cdot 1$, $(-1) \cdot x = -x = (-1) \cdot x$ und $(-1)^2 = 1$.)
Zeige, dass die Gruppe Q nilpotent ist und bestimme die Nilpotenzklasse von Q.

Aufgabe 4.4
Sei K ein Körper und $G \subseteq K \setminus \{0\}$ eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$. Zeige: Die Gruppe G ist zyklisch.
Hinweis: Benutze den Struktursatz für endlich erzeugte, abelsche Gruppen und betrachte die Elemente aus G als Nullstellen geeigneter Polynomen.

Bitte wenden.

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Eine *Partition* von n ist ein Tupel $(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k$ mit $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_k \leq n$ und $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.
Beispiel: Die Partitionen von $n = 3$ sind $(1,1,1), (1,2)$ und (3).

***-Aufgabe**
Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Zeige: Die Menge der Isomorphieklassen der abelschen Gruppen von Ordnung p^n steht in Bijektion zu der Menge der Partitionen von n.

Abgabe bis: Donnerstag, den 12.5.2016, 8 Uhr