4. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“
Musterlösung

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 4.1
Sei G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. Zeige: G ist residuell endlich.

Lösung: Nach dem Struktursatz für endlich erzeugte, abelsche Gruppen gibt es $k \in \mathbb{N}$ und $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{Z}, n_i \geq 2$ so, dass

$$G \cong \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z}$$

gilt. Es genügt daher zu zeigen, dass die Gruppe $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z}$ residuell endlich ist.
Sei $(y, x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z}$ mit $(y, x_1, \ldots, x_l) \neq 0$ beliebig. Dann gibt es $1 \leq j \leq l$ mit $x_j \neq 0 \in \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$ oder es gilt $y \neq 0 \in \mathbb{Z}^k$.
Im ersten Fall setze $H := \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$ und definiere

$$\varphi : \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$$

als Projektion auf die $(j+1)$-te Komponente. Nach Konstruktion gilt:

$$\varphi(y, x_1, \ldots, x_l) = x_j \neq 0 \in \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$$

Im zweiten Fall wähle eine ganze Zahl N so, dass N größer ist als die Beträge aller Einträge von $y \in \mathbb{Z}^k$. Dann definiert die Reduktion aller Einträge $\bmod N$ einen Gruppenhomomorphismus $p : \mathbb{Z}^k \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^k$ in die endliche Gruppe $H := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^k$. Sei $\pi : \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^k$ die kanonische Projektion auf die erste Komponente und setze $\varphi = p \circ \pi$. Da die Einträge $y_1, \ldots, y_k$ von y im Betrag kleiner als N und nicht alle gleich 0 sind, gilt:

$$\varphi(y, x_1, \ldots, x_l) = p \circ \pi(y, x_1, \ldots, x_l) = p(y) \neq 0 \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^k$$

Damit ist $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z}$ nach Definition residuell endlich.

Aufgabe 4.2
Sei G eine Gruppe und $A, B \subseteq G$ Untergruppen. Zeige: Die Gruppe

$$[A, B] = \langle \{[a, b] \mid a \in A, b \in B\} \rangle$$

ist ein Normalteiler in der von A und B erzeugten Untergruppe $\langle A \cup B \rangle$.

Lösung: Offenbar ist $[A, B]$ eine Untergruppe von $\langle A \cup B \rangle$. Weiter ist $[A, B]$ genau dann normal in $\langle A \cup B \rangle$, wenn $\langle A \cup B \rangle \subseteq N_G([A, B])$ gilt. Hierfür beweisen wir, dass sowohl A als auch B in $N_G([A, B])$ enthalten sind.

Wir beginnen mit folgender Kommutatorgleichung:
Für alle $x, y, z \in G$ gilt $[x, yz] = [x, y] \cdot y[x, z]y^{-1}$.
Dies zeigt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
[x, y] \cdot y[x, z]y^{-1} &= (xyx^{-1}y^{-1}) \cdot (yxzx^{-1}z^{-1}y^{-1}) \\
&= xy(x^{-1}y^{-1}yx)zx^{-1}z^{-1}y^{-1} \\
&= xyzx^{-1}z^{-1}y^{-1} \\
&= x(yz)x^{-1}(yz)^{-1} = [x, yz]
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass A die Untergruppe $[A, B]$ normalisiert, genügt es zu beweisen, dass ein Erzeugendensystem von $[A, B]$ unter Konjugation mit A in $[A, B]$ enthalten bleibt. Es gilt $[A, B] = [B, A]$. (Beachte: $[a, b]^{-1} = [b, a]$) Also wird $[A, B]$ von Ausdrücken der Form $[b, a]$ mit $a \in A, b \in B$ erzeugt. Seien $a, a' \in A$ und $b \in B$ beliebig. Dann gilt nach der obigen Kommutatorgleichung:

$$[b, a'a] = [b, a'] \cdot a'[b, a]a'^{-1}$$

Durch Umstellen erhalten wir:

$$a'[b, a]a'^{-1} = [b, a']^{-1} \cdot [b, a'a] \in [B, A] = [A, B]$$

Da $a'[b, a]a'^{-1} \in [A, B]$ gilt und $a' \in A$ beliebig war, folgt $A \subseteq N_G([A, B])$. Seien nun $a \in A$ und $b, b' \in B$ beliebig. Nach der Kommutatorgleichung gilt:

$$\begin{aligned}
& [a, bb'] = [a, b] \cdot b[a, b']b^{-1} \\
\Rightarrow\ & b[a, b']b^{-1} = [a, b]^{-1} \cdot [a, bb'] \in [A, B]
\end{aligned}$$

Somit gilt auch $B \subseteq N_G([A, B])$. Da $N_G([A, B])$ eine Untergruppe von G ist, die A und B enthält, folgt $\langle A \cup B \rangle \subseteq N_G([A, B])$. Daher ist $[A, B]$ ein Normalteiler in $\langle A \cup B \rangle$.

Aufgabe 4.3
Wir definieren die Quaternionengruppe Q als

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\} \subseteq \mathbb{H} \setminus \{0\}$$

mit den Rechenregeln $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ und $ij = k = -ji$.
(Natürlich gelten weiterhin die „offensichtlichen" Regeln $1 \cdot x = x = x \cdot 1$, $(-1) \cdot x = -x = (-1) \cdot x$ und $(-1)^2 = 1$.)
Zeige, dass die Gruppe Q nilpotent ist und bestimme die Nilpotenzklasse von Q.

Lösung: Wir zeigen zuerst $Z(Q) = \{1, -1\}$.
Es ist klar, dass $\{1, -1\} \subseteq Z(Q)$ gilt. Es bleibt nur zu zeigen, dass kein Element aus $\{i, -i, j, -j, k, -k\}$ im Zentrum von Q liegt. Wegen $-1 \in Z(Q)$ genügt es schon, $i \notin Z(Q), j \notin Z(Q)$ und $k \notin Z(Q)$ zu beweisen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
ij &= k \neq -k = -(-ji) = ji \\
ik &= i(ij) = i^2 j = -j \neq j = -ji^2 = (-ji)i = ki
\end{aligned}$$

Somit vertauscht i weder mit j noch mit k und kein Element aus $\{i, j, k\}$ liegt in $Z(Q)$. Nun beweisen wir, dass $Q/Z(Q)$ abelsch ist. Da Q von $\{i, j\}$ erzeugt wird, ist $\{iZ(Q), jZ(Q)\}$ ein Erzeugendensystem der Quotientengruppe $Q/Z(Q)$. Desweiteren gilt wegen $-1 \in Z(Q)$:

$$\begin{aligned} iZ(Q) \cdot jZ(Q) &= ijZ(Q) = kZ(Q) = k(-1)Z(Q) \\ &= -kZ(Q) = jiZ(Q) = jZ(Q) \cdot iZ(Q) \end{aligned}$$

Also kommutieren $iZ(Q)$ und $jZ(Q)$ miteinander und die Gruppe $Q/Z(Q)$ ist abelsch, d.h. $Z_2Q = \pi^{-1}(Z(Q/Z(Q)) = Q$. Daraus folgt, dass Q nilpotent ist und nach einem Satz aus Kapitel 2 der Vorlesung hat Q die Nilpotenzklasse $\min\{j \mid Z_jQ = Q\} = 2$.

Aufgabe 4.4
Sei K ein Körper und $G \subseteq K \setminus \{0\}$ eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$. Zeige: Die Gruppe G ist zyklisch.

Lösung: Als endliche Untergruppe der abelschen Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist G insbesondere eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. Nach dem Struktursatz für endlich erzeugte, abelsche Gruppen gibt es nun $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}, n_i \geq 2$ mit

$$G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}.$$

Wir zeigen nun, dass die $n_i, i = 1, \ldots, k$ paarweise teilerfremd sind.
Per Widerspruch: Angenommen, n_i und n_j sind nicht teilerfremd für $i \neq j$. Durch Umbenennen kann ohne Einschränkung $i = 1$ und $j = 2$ angenommen werden. Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ mit $m|n_1$ und $m|n_2$. Dann haben sowohl $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}$ als auch $\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ eine (eindeutige) Untergruppe der Ordnung m. Sei U_i die Untergruppe der Ordnung m von $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ für $i = 1, 2$. Dann haben alle Elemente aus

$$(U_1 \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}) \cup (\{0\} \times U_2 \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}) \subseteq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$$

eine Ordnung, die m teilt. Insbesondere enthält $G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ damit mindestens $m + (m-1) = 2m - 1 > m$ Elemente g mit $\mathrm{ord}(g)|m$, d.h. $g^m = 1$. Somit hat das Polynom $X^m - 1 \in K[X]$ mehr als m Nullstellen. $\lightning$
(Dies ist ein Widerspruch, da ein Polynom von Grad $m \geq 1$ über einem Körper höchstens m Nullstellen besitzt.)
Die Annahme, n_i und n_j hätten einen gemeinsamen Teiler für $i \neq j$, war daher falsch, und die n_i sind paarweise teilerfremd.
Aus der Algebra ist bekannt, dass

$$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}$$

für teilerfremde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, n_1, n_2 \geq 2$ gilt. Induktiv folgt:

$$G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n_1 \cdot \ldots \cdot n_k\mathbb{Z}$$

Also ist G eine zyklische Gruppe.

***-Aufgabe**
Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Zeige: Die Menge der Isomorphieklassen der abelschen Gruppen von Ordnung p^n steht in Bijektion zu der Menge der Partitionen von n.

Lösung: Wir bezeichnen mit $\mathrm{Iso}(p^n)$ die Menge der Isomorphieklassen der abelschen Gruppen von Ordnung p^n und mit $\mathrm{Part}(n)$ die Menge der Partitionen von n. Definiere:

$$\varphi : \mathrm{Part}(n) \to \mathrm{Iso}(p^n),\ (m_1, \dots, m_k) \mapsto \mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}$$

Wegen $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = n$ gilt:

$$\#(\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}) = \#(\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z}) \cdot \ldots \cdot \#(\mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}) = p^{m_1} \cdot \ldots \cdot p^{m_k} = p^n$$

Also ist $\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe von Ordnung p^n und φ ist wohldefiniert. Zu zeigen: φ ist surjektiv.
Sei A eine beliebige abelsche Gruppe von Ordnung p^n. Nach dem Struktursatz gibt es $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{Z}, s_i \geq 2$ mit $s_i | s_{i+1}$ und $A \cong \mathbb{Z}/s_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/s_k\mathbb{Z}$. Wegen $s_i | \#A = p^n$ gilt $s_i = p^{m_i}$ für geeignete $1 \leq m_i \leq n$. Dann ist $(m_1, \dots, m_k)$ eine Partition von n und es gilt $\varphi(m_1, \dots, m_k) = A$. Somit ist φ surjektiv.
Zu zeigen: φ ist injektiv. Seien $(m_1, \dots, m_k)$ und $(m'_1, \dots, m'_l)$ Partitionen von n mit

$$\begin{aligned} \varphi(m_1, \dots, m_k) &= \mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z} \\ &\cong \mathbb{Z}/p^{m'_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m'_l}\mathbb{Z} = \varphi(m'_1, \dots, m'_l). \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass nun schon $(m_1, \dots, m_k) = (m'_1, \dots, m'_l)$, also $k = l$ und $m_i = m'_i$ für alle $i = 1, \dots, k$ gilt.
Wir führen folgende Notation ein. Sei $s_i = \max\{j \mid m_j \leq i\}$ für $i = 1, \dots, n$. Es sind also die ersten s_1 Einträge von $(m_1, \dots, m_k)$ gleich 1, die darauf folgenden $s_2 - s_1$ Einträge gleich 2, die nächsten $s_3 - s_2$ Einträge gleich 3 usw. Analog definieren wir $s'_i, i = 1, \dots, l$ für die Partition $(m'_1, \dots, m'_l)$.
Da jedes $\mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ eine eindeutige Untergruppe von Ordnung p hat, enthält $\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}$ genau p^k Elemente von Ordnung $\leq p$. (Beachte, dass die Ordnung von $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}$ das Maximum der Ordnungen der $x_i \in \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ ist.)
Genauso enthält $\mathbb{Z}/p^{m'_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m'_l}\mathbb{Z}$ genau p^l Elemente der Ordnung $\leq p$. Da $\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/p^{m'_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m'_l}\mathbb{Z}$ ist, gilt $p^k = p^l$, d.h. $k = l$.
Nun hat $\mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ für $m_i \geq 2$ eine eindeutige Untergruppe von Ordnung p^2. Weiter gilt $m_i \geq 2$ für alle $i > s_1$. Somit hat $\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}$ genau $p^{s_1} \cdot (p^2)^{k-s_1} = p^{2k-s_1}$ Elemente von Ordnung $\leq p^2$. Wiederum folgt $p^{2k-s_1} = p^{2l-s'_1}$ und wegen $k = l$ gilt $s_1 = s'_1$.
Für $m_i \geq 3$ besitzt $\mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ genau eine Untergruppe der Ordnung p^3. Wie oben enthält $\mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z}$ daher genau $p^{s_1} \cdot (p^2)^{s_2-s_1} \cdot (p^3)^{k-s_2} = p^{3k-s_1-s_2}$ Elemente der Ordnung $\leq p^3$. Damit gilt $p^{3k-s_1-s_2} = p^{3l-s'_1-s'_2}$, also wegen $k = l$ und $s_1 = s'_1$ auch $s_2 = s'_2$.
Durch das Iterieren dieses Arguments erhalten wir $s_i = s'_i$ für alle $i = 1, \dots, k$. Dies bedeutet aber genau $(m_1, \dots, m_k) = (m'_1, \dots, m'_l)$. Somit ist φ injektiv.
Insgesamt ist φ eine Bijektion zwischen $\mathrm{Part}(n)$ und $\mathrm{Iso}(p^n)$.