3. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 3.1
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine quasi-Isometrie. Sei $h : X \to Y$ eine Abbildung, die endlichen Abstand zu f hat. Zeige: h ist eine quasi-Isometrie.

Aufgabe 3.2
Sei G eine Gruppe und $A, B \subseteq G$ Untergruppen. Zeige:

a) Sind A und B charakteristische Untergruppen, so ist auch $A \cap B$ eine charakteristische Untergruppe von G.

b) Gilt $A \subseteq B$, A ist charakteristisch in B und B charakteristisch in G, so ist A charakteristisch in G.

c) Ist A eine charakteristische Untergruppe von G mit $A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so gilt $A \subseteq Z(G)$.

d) Gebe ein Beispiel für eine Gruppe G an, die einen Normalteiler N enthält, der nicht charakteristisch in G ist.

Aufgabe 3.3
Sei G eine nilpotente Gruppe und $\{1\} \neq N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeige:

a) Es gilt $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.

b) Ist N ein minimaler echter Normalteiler von G (d.h. es gibt keinen Normalteiler $N' \trianglelefteq G$ mit $\{1\} \neq N' \subsetneq N$), so gilt $N \subseteq Z(G)$.

Aufgabe 3.4
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Gruppe $\mathrm{UT}(n, R)$ durch

$$\mathrm{UT}(n,R) := \{(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \mid a_{ii} = 1 \text{ und } a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\} \subseteq \mathrm{SL}(n,R)$$

als Untergruppe der Matrizengruppe $\mathrm{SL}(n, R)$. Nach Definition sind die Elemente von $\mathrm{UT}(n, R)$ genau die $(n\times n)$-Matrizen über R von der Form $\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

wobei die $*$ beliebige Einträge aus R bezeichnen.
Zeige, dass $\mathrm{UT}(n, R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nilpotent ist und bestimme die Nilpotenzklasse von $\mathrm{UT}(n, \mathbb{Z})$ in Abhängigkeit von n.

***-Aufgabe**
Sei G eine nilpotente Gruppe und $A \trianglelefteq G$ ein maximaler abelscher Normalteiler in G (d.h. es existiert kein abelscher Normalteiler von G, in dem A echt enthalten ist). Zeige, dass $C_G(A) = A$ gilt, wobei

$$C_G(A) := \{c \in G \mid ac = ca \text{ für alle } a \in A\}$$

der *Zentralisator* von A in G ist.
Hinweis: Verwende Aufgabe 3.3 a).

Abgabe bis: Mittwoch, den 4.5.2016, 18 Uhr