# 2. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

---

**Aufgabe 2.1**
Seien $G, H$ endliche erzeugte Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent zueinander sind:

*i)* $\varphi$ ist eine quasi-Isometrie.

*ii)* Es gilt $\# \ker(\varphi) < \infty$ und $[H : \mathrm{im}(\varphi)] < \infty$.

**Aufgabe 2.2**
Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe, $S \subseteq G$ eine endliche Menge, die $G$ erzeugt, und $\beta_{G,S}$ die zugehörige Wachstumsfunktion. Zeige:

a) Ist $G$ unendlich, so ist $\beta_{G,S}$ streng monoton steigend.

b) $\beta_{G,S}$ ist *submultiplikativ*, d.h. für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\beta_{G,S}(m+n) \leq \beta_{G,S}(m) \cdot \beta_{G,S}(n).$$

**Aufgabe 2.3**
Seien $G, H$ endlich erzeugte Gruppen und $S \subseteq G, T \subseteq H$ endliche Mengen, die $G$ bzw. $H$ erzeugen. Sei $U = (S \times \{1\}) \cup (\{1\} \times T) \subseteq G \times H$. Seien $\beta_{G,S}, \beta_{H,T}$ und $\beta_{G\times H,U}$ die zugehörigen Wachstumsfunktionen.
Zeige, dass $\beta_{G\times H,U} \sim \beta_{G,S} \cdot \beta_{H,T}$ gilt.

**Aufgabe 2.4**
Zeige:

a) Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat lineares Wachstum.

b) Die Gruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ hat für $n \geq 2$ exponentielles Wachstum.
*Hinweis*: Zeige dies zunächst für $n = 2$.

*Bitte wenden.*

***-Aufgabe**

Sei $G$ die Heisenberg-Gruppe über $\mathbb{Z}$, d.h. die Matrizengruppe

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sei $S$ ein endliches Erzeugendensystem von $G$. Zeige, dass $G$ eine endlich erzeugte Untergruppe $H$ enthält, so dass für alle endlichen Erzeugendensysteme $T$ von $H$ der metrische Raum $(H, d_T)$ nicht quasi-isometrisch zum Raum $(H, d_S|_{H\times H})$ ist.

Abgabe bis: Donnerstag, den 28.4.2016, 8 Uhr