# 2. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“
## Musterlösung

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

---

**Aufgabe 2.1**
Seien $G, H$ endliche erzeugte Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent zueinander sind:

*i)* $\varphi$ ist eine quasi-Isometrie.

*ii)* Es gilt $\#\ker(\varphi) < \infty$ und $[H : \mathrm{im}(\varphi)] < \infty$.

*Lösung:*„*ii)* $\Rightarrow$ *i)*“ Sei $\#\ker(\varphi) < \infty$ und $[H : \mathrm{im}(\varphi)] < \infty$. Nach Aufgabe 1.3 ist dann die kanonische Projektion $\pi : G \to G/\ker\varphi$ eine quasi-Isometrie. Weiter folgt mit Korollar 8 aus Kapitel 1 der Vorlesung aus $[H : \mathrm{im}(\varphi)] < \infty$, dass die Inklusion $\iota : \mathrm{im}(\varphi) \hookrightarrow H$ eine quasi-Isometrie ist.
Nun gilt nach dem Homomorphiesatz $G/\ker(\varphi) \cong \mathrm{im}(\varphi)$, wobei der Isomorphismus $\bar{\varphi} : G/\ker(\varphi) \to \mathrm{im}(\varphi)$ durch $\bar{\varphi}(g\ker(\varphi)) = \varphi(g)$ gegeben ist. Insbesondere ist $\bar{\varphi}$ eine quasi-Isometrie. Nun gilt aber $\varphi = \iota \circ \bar{\varphi} \circ \pi$ und $\varphi$ ist als Komposition von quasi-Isometrien eine quasi-Isometrie.
„*i)* $\Rightarrow$ *ii)*“ Sei $\varphi$ eine quasi-Isometrie. Seien weiter $S \subseteq G$ und $T \subseteq H$ endliche Erzeugendensysteme von $G$ bzw. $H$. Wir zeigen zuerst: $\#\ker(\varphi) < \infty$
Sei $g \in \ker(\varphi)$ beliebig. Nach der äquivalenten Definition von quasi-Isometrie in Aufgabe 1.1 gibt es Konstanten $\lambda \geq 1, \varepsilon \geq 0$ mit

$$\frac{1}{\lambda} \cdot d_S(1, g) - \varepsilon \leq d_Y(\varphi(1), \varphi(g)) = d_Y(1, 1) = 0.$$

Somit gilt aber $d_S(1, g) \leq \lambda \cdot \varepsilon < \infty$, d.h. $g \in B_{\lambda\varepsilon}(1)$ und da $x \in \ker(\varphi)$ beliebig war, gilt $\ker(\varphi) \subseteq B_{\lambda\varepsilon}(1)$. Folglich ist $\ker(\varphi)$ als Teilmenge der endlichen Menge $B_{\lambda\varepsilon}(1)$ endlich.
Noch zu zeigen: $[H : \mathrm{im}(\varphi)] < \infty$
Da $\varphi$ eine quasi-Isometrie ist, existiert eine Konstante $R \geq 0$, sodass es zu jedem $h \in H$ ein $g \in G$ mit $d_T(\varphi(g), h) \leq R$ gibt. Für ein solches $g$ gilt dann

$$d_T(1, \varphi(g)^{-1}h) = l_T(\varphi(g)^{-1}h) = d_T(\varphi(g), h) \leq R,$$

d.h. $\varphi(g)^{-1}h \in B_R(1) \subseteq H$. Desweiteren gilt $h = \varphi(g) \cdot (\varphi(g)^{-1}h)$.
$\varphi(g)^{-1}h$ ist also ein Repräsentant der Rechtsnebenklasse $\mathrm{im}(\varphi)h$.
Da die endliche Menge $B_R(1)$ ein Rechtstransversal von $\mathrm{im}(\varphi)$ in $H$ enthält, existieren nur endlich viele Rechtsnebenklassen von $\mathrm{im}(\varphi)$ in $H$, d.h. es gilt $[H : \mathrm{im}(\varphi)] < \infty$.

**Aufgabe 2.2**
Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe, $S \subseteq G$ eine endliche Menge, die $G$ erzeugt, und $\beta_{G,S}$ die zugehörige Wachstumsfunktion. Zeige:

a) Ist $G$ unendlich, so ist $\beta_{G,S}$ streng monoton steigend.

b) $\beta_{G,S}$ ist *submultiplikativ*, d.h. für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\beta_{G,S}(m+n) \leq \beta_{G,S}(m) \cdot \beta_{G,S}(n).$$

*Lösung:*

a) Sei $G$ unendlich und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $B_n(1)$ endlich ist, gilt $G \neq B_n(1)$. Sei $g \in G$ mit $l_S(g) = m > n$. Dann gibt es eine minimale Darstellung als Produkt $g = s_1 \cdot \ldots \cdot s_m$ mit $s_1, \ldots, s_m \in S \cup S^{-1}$. Wegen der Minimalität gilt $l_S(s_1 \cdot \ldots \cdot s_k) = k$ für alle $1 \leq k \leq m$.
Insbesondere gilt $l_S(s_1 \cdot \ldots \cdot s_{n+1}) = n+1$, d.h. $s_1 \cdot \ldots \cdot s_{n+1} \in B_{n+1}(1) \setminus B_n(1)$.
Insgesamt erhalten wir

$$\beta_{G,S}(n) = \#B_n(1) < \#B_{n+1}(1) = \beta_{G,S}(n+1)$$

und $\beta_{G,S}$ ist somit streng monoton steigend.

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig. Seien $g \in B_m(1), g' \in B_n(1)$ beliebig. Dann gilt:

$$l_S(gg') \leq l_S(g) + l_S(g') \leq m + n$$

Daher erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\mu : B_m(1) \times B_n(1) \to B_{n+m}(1), (g, g') \mapsto gg'.$$

Wir zeigen nun, dass $\mu$ surjektiv ist. Sei $g \in B_{n+m}(1)$ beliebig.
Gilt $l_S(g) \leq m$ (also $g \in B_m(1)$), so ist $g = g \cdot 1 = \mu(g, 1)$.
Andernfalls setze $k := l_S(g) \leq m + n$ und schreibe $g = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$ mit $s_1, \ldots, s_k \in S \cup S^{-1}$. Wegen der Minimalität der Darstellung gilt für $x := s_1 \cdot \ldots \cdot s_m$ und $y := s_{m+1} \cdot \ldots \cdot s_k$ dann

$$l_S(x) = m \text{ und } l_S(y) = k - m \leq m + n - m = n,$$

also $x \in B_m(1)$ und $y \in B_n(1)$. Nach Wahl gilt $g = x \cdot y = \mu(x, y)$.
Somit ist $\mu$ surjektiv und es folgt:

$$\begin{aligned}\beta_{G,S}(n+m) = \#B_{n+m}(1) &\leq \#(B_m(1) \times B_n(1)) \\ &= \#B_m(1) \cdot \#B_n(1) = \beta_{G,S}(m) \cdot \beta_{G,S}(n)\end{aligned}$$

Also ist die Wachstumsfunktion $\beta_{G,S}$ submultiplikativ.

**Aufgabe 2.3**
Seien $G, H$ endlich erzeugte Gruppen und $S \subseteq G, T \subseteq H$ endliche Mengen, die $G$ bzw. $H$ erzeugen. Sei $U = (S \times \{1\}) \cup (\{1\} \times T) \subseteq G \times H$. Seien $\beta_{G,S}, \beta_{H,T}$ und $\beta_{G \times H,U}$ die zugehörigen Wachstumsfunktionen.
Zeige, dass $\beta_{G \times H,U} \sim \beta_{G,S} \cdot \beta_{H,T}$ gilt.

*Lösung:* Aus der Definition des Erzeugendensystems $U$ und der komponentenweisen Multiplikation in der Gruppe $G \times H$ wird sofort klar, dass
$l_U(g, h) = l_S(g) + l_T(h)$ für alle $(g, h) \in G \times H$ gilt.

Diese Vorüberlegung benutzen wir nun, um zu zeigen, dass die Wachstumsfunktion $\beta_{G\times H,U}$ äquivalent zu $\beta_{G,S}\cdot\beta_{H,T}$ ist.
Zu zeigen: $\beta_{G\times H,U} \preccurlyeq \beta_{G,S}\cdot\beta_{H,T}$ und $\beta_{G\times H,U} \succcurlyeq \beta_{G,S}\cdot\beta_{H,T}$
Für die erste Abschätzung beweisen wir, dass $\beta_{G\times H,U}(n) \leq \beta_{G,S}(n)\cdot\beta_{H,T}(n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt. Sei $(g,h)\in B_n^{G\times H}(1)$ beliebig. Dann gilt nach Vorüberlegung:

$$\max\{l_S(g), l_T(h)\} \leq l_S(g) + l_S(h) = l_U(g,h) \leq n$$

Dies bedeutet $g\in B_n^G(1), h\in B_n^H(1)$. Die Identität $\mathrm{id}_{G\times H}$ induziert also eine Inklusion $B_n^{G\times H}(1) \hookrightarrow B_n^G(1)\times B_n^H(1)$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\beta_{G\times H,U}(n) = \#B_n^{G\times H}(1) &\leq \#(B_n^G(1)\times B_n^H(1))\\ &= \#B_n^G(1)\cdot\#B_n^H(1) = \beta_{G,S}(n)\cdot\beta_{H,T}(n)\end{aligned}$$

Für die zweite Abschätzung zeigen wir $\beta_{G\times H,U}(2n) \geq \beta_{G,S}(n)\cdot\beta_{H,T}(n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
Für $g\in G, h\in H$ mit $l_S(g)\leq n$ und $l_T(h)\leq n$ gilt nach Vorüberlegung $l_U(g,h) = l_S(g)+l_T(h) \leq n+n = 2n$. Die Identität $\mathrm{id}_{G\times H}$ liefert daher eine Inklusion $B_n^G(1)\times B_n^H(1) \hookrightarrow B_{2n}^{G\times H}(1)$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\beta_{G,S}(n)\cdot\beta_{H,T}(n) = \#B_n^G(1)\cdot\#B_n^H(1) &= \#(B_n^G(1)\times B_n^H(1))\\ &\leq \#B_{2n}^{G\times H}(1) = \beta_{G\times H,U}(2n)\end{aligned}$$

Damit haben wir $\beta_{G\times H,U} \preccurlyeq \beta_{G,S}\cdot\beta_{H,T}$ und $\beta_{G\times H,U} \succcurlyeq \beta_{G,S}\cdot\beta_{H,T}$ gezeigt und es gilt $\beta_{G\times H,U} \sim \beta_{G,S}\cdot\beta_{H,T}$.

**Aufgabe 2.4**
Zeige:

a) Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat lineares Wachstum.

b) Die Gruppe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ hat für $n\geq 2$ exponentielles Wachstum.

*Lösung:*

a) Um zu zeigen, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lineares Wachstum hat, konstruieren wir zunächst eine Untergruppe $H$ von endlichem Index in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.
Seien $a, b\in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Erzeuger, der zwei freien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Faktoren. Dann induziert die Zuordnung $a\mapsto 1+2\mathbb{Z}, b\mapsto 1+2\mathbb{Z}$ nach der universellen Eigenschaft einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus
$\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\varphi$ ist offensichtlich surjektiv. Sei $H := \ker(\varphi)$.
Nach dem Homomorphiesatz gilt $[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : H] = \#\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 2$.
Weiter besitzt nach Gruppentheorie 1 jedes Element $g\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ eine Normalform bzgl. $\{a,b\}$, d.h. jedes Element lässt sich als Produkt $g = s_1\cdot\ldots\cdot s_n$ mit $s_i\in\{a,b\}$ und $s_i\neq s_{i+1}$ für alle $i = 1,\ldots,n$ schreiben. Dann gilt:

$$\varphi(g) = \varphi(s_1\cdot\ldots\cdot s_n) = \sum_{i=1}^{n}\varphi(s_i) = n + 2\mathbb{Z}$$

Der Kern $H$ besteht also genau aus den Produkten von $a, b$ mit gerader Länge, d.h. $H$ ist zyklisch und wird erzeugt von $ab$. Wegen $\operatorname{ord}(ab) = \infty$ folgt $H \cong \mathbb{Z}$.
Da $H$ endlichen Index in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat, ist $H$ nach Korollar 8 aus Kapitel 1 der Vorlesung quasi-isometrisch zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nach Satz 12 aus Kapitel 1 sind die Wachstumsfunktionen $\beta_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\{a,b\}}$ und $\beta_{H,\{ab\}}$ äquivalent. Da $H \cong \mathbb{Z}$ lineares Wachstum hat, besitzt somit auch die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lineares Wachstum.

b) Wir zeigen zuerst, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ exponentielles Wachstum hat. Nach Lemma 16 aus Kapitel 1 der Vorlesung genügt es zu zeigen, dass eine endlich erzeugte Untergruppe $H \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit exponentiellem Wachstum existiert. (Für den Homomorphismus in Lemma 16 wählen wir dann die Inklusion $H \hookrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.)
Nach Beispiel 17 in Kapitel 2 der Gruppentheorie 1 erzeugen die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ eine freie Gruppe von Rang 2.
Diese hat nach Vorlesung exponentielles Wachstum. Nach Lemma 16 hat also $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mindestens exponentielles Wachstum. Da eine endlich erzeugte Gruppe niemals stärker als exponentiell wachsen kann, hat $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ damit exponentielles Wachstum.
Für $n > 2$ bemerken wir, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ als Untergruppe enthalten ist. (Wir können eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ durch die Blockgestalt $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ zu einer Matrix in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ ergänzen (dabei bezeichnet $I_{n-2}$ die $(n-2) \times (n-2)$-Einheitsmatrix). Man sieht leicht, dass $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus definiert.)
Da $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ exponentielles Wachstum besitzt, hat $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ damit nach Lemma 16 ebenfalls exponentielles Wachstum.

***-Aufgabe**
Sei $G$ die Heisenberg-Gruppe über $\mathbb{Z}$, d.h. die Matrizengruppe

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sei $S$ ein endliches Erzeugendensystem von $G$. Zeige, dass $G$ eine endlich erzeugte Untergruppe $H$ enthält, so dass für alle endlichen Erzeugendensysteme $T$ von $H$ der metrische Raum $(H, d_T)$ nicht quasi-isometrisch zum Raum $(H, d_S|_{H \times H})$ ist.

*Lösung:* Wir zeigen zuerst, dass für eine beliebige Untergruppe $H \subseteq G$ die Richtigkeit der Aussage unabhängig von der Wahl der Erzeugendensysteme $S$ und $T$ ist.
Seien $S' \subseteq G, T' \subseteq H$ weitere endliche Erzeugendensysteme von $G$ bzw. $H$. Nach Lemma 2 aus Kapitel 1 der Vorlesung ist $(H, d_T)$ dann quasi-isometrisch zu $(H, d_{T'})$. Weiter ist nach Lemma 2 die Identität $\mathrm{id}_G : (G, d_S) \to (G, d_{S'})$ eine quasi-Isometrie. Somit ist auch $(H, d_S|_{H \times H})$ quasi-isometrisch zu $(H, d_{S'}|_{H \times H})$.

Wegen der Transitivität der quasi-Isometrie ist $(H, d_T)$ genau dann quasi-isometrisch zu $(H, d_S|_{H\times H})$, wenn $(H, d_{T'})$ quasi-isometrisch zu $(H, d_{S'}|_{H\times H})$ ist.
Nach dieser Vorüberlegung genügt es nun eine endlich erzeugte Untergruppe $H$ in der Heisenberg-Gruppe anzugeben und für zwei beliebig gewählte endliche Erzeugendensysteme $S \subseteq G, T \subseteq H$ nachzuweisen, dass $(H, d_T)$ nicht quasi-isometrisch zu $(H, d_S|_{H\times H})$ ist. Wir definieren:

$$s := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } u := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $S = \{s, t, u\}$. Man rechnet leicht nach, dass für $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} s^a &= \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & t^b &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ u^c &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } & t^b s^a u^c &= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt, $S$ also $G$ erzeugt. Sei $H = \langle u \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{Z} \right\}$ die von $u$ erzeugte Untergruppe. Aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & c' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c+c' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt sofort $H \cong \mathbb{Z}$, wobei durch $1 \mapsto u$ ein Isomorphismus gegeben ist.
Setze $T = \{u\}$. Dann gilt $l_T(u^c) = |c|$ für alle $c \in \mathbb{Z}$.
Wir wollen zeigen, dass $(H, d_T)$ nicht quasi-isometrisch zu $(H, d_S|_{H\times H})$ ist.
Dafür beweisen wir zunächst folgende Abschätzung für $d_S|_{H\times H}$:
Für alle $c \in \mathbb{Z}$ gilt $l_S(u^c) \leq 6 \cdot \sqrt{|c|}$.
Wegen $l_S(u^{-c}) = l_S(u^c)$ können wir ohne Einschränkung $c > 0$ annehmen.
Seien $k, l \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} t^k s^l t^{-k} s^{-l} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -l & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -kl \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = u^{-kl} \end{aligned}$$

Setze nun $i = \lfloor \sqrt{c} \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq \sqrt{c}\} \leq \sqrt{c}$ und $j = c - i^2 \geq 0$.
Dann gilt $j \leq 2\sqrt{c}$. Dies sehen wir wie folgt:
Nach Konstruktion gilt $\sqrt{c} = i + \varepsilon$ mit $0 \leq \varepsilon < 1$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} j &= c - i^2 = \sqrt{c}^2 - i^2 = (i+\varepsilon)^2 - i^2 \\ &= i^2 + 2i\varepsilon + \varepsilon^2 - i^2 = 2i\varepsilon + \varepsilon^2 \leq 2i + 2\varepsilon = 2\sqrt{c} \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$t^{-i}s^it^is^{-i}u^j = u^{i^2}u^j = u^{i^2+c-i^2} = u^c$$

Also:

$$l_S(u^c) = l_S(t^{-i}s^it^is^{-i}u^j) \leq i+i+i+i+j \leq 6\sqrt{c}$$

Wir können nun das Wachstum der Bälle in $H$ bzgl. $d_T$ und $d_S|_{H\times H}$ betrachten. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\beta_{H,T}(n) &= \#\{h \in H \mid l_T(h) \leq n\} = 2n+1 \\
\beta_{H,S}(n) &:= \#\{h \in H \mid l_S(h) \leq n\} \geq \#\{u^c \mid c \in \mathbb{Z} \text{ mit } 6\sqrt{|c|} \leq n\} \\
&= \#\{u^c \mid c \in \mathbb{Z} \text{ mit } |c| \leq \frac{n^2}{36}\} = 2\lfloor\frac{n^2}{36}\rfloor + 1 \geq 2(\frac{n^2}{36} - 1) + 1
\end{aligned}$$

Insbesondere wachsen die Bälle in $H$ bzgl. $d_T$ linear und bzgl. der Metrik $d_S|_{H\times H}$ mindestens quadratisch. Nach Lemma 14 in Kapitel 1 der Vorlesung gilt $\beta_{H,T} \nsim \beta_{H,S}$.
Jetzt argumentieren wir per Widerspruch:
Angenommen, $(H, d_T)$ sei quasi-isometrisch zu $(H, d_S|_{H\times H})$. Dann folgt genau wie im Beweis von Satz 12 in Kapitel 1 schon $\beta_{H,T} \sim \beta_{H,S}$. (Beachte, dass wir in diesem Beweis nur verwendet haben, dass die Bälle mit endlichem Radius endlich und die Metriken linksinvariant sind. Wir können somit hier den gleichen Beweis führen, obwohl $d_S|_{H\times H}$ keine Wortmetrik bzgl. eines Erzeugendensystems von $H$ ist.)
Da wir oben gezeigt haben, dass die „Wachstumsfunktionen“ $\beta_{H,T}$ und $\beta_{G,S}$ nicht äquivalent zueinander sind, ist dies ein Widerspruch. $\lightning$
Insgesamt haben wir nun bewiesen, dass für alle endlichen Erzeugendensysteme $S \subseteq G$ und $T \subseteq H$ die metrischen Räume $(H, d_T)$ und $(H, d_S|_{H\times H})$ nicht quasi-isometrisch zueinander sind.