11. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 11.1
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Es gibt unendlich viele Matrizen $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, die i als Eigenwert haben.

b) Es gibt eine Matrix in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit Eigenwert $\lambda = \sqrt{2}$.

c) Für $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ ist jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A ganz über $\mathbb{Z}$.

d) Ist jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ ganz über $\mathbb{Z}$, so hat A endliche Ordnung in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Aufgabe 11.2
Sei K ein Körper mit $\#K \geq 4$. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(K)$ perfekt ist, d.h. dass $D\mathrm{SL}_2(K) = \mathrm{SL}_2(K)$ gilt. Ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ perfekt?

Hinweis: Benutze, dass $\mathrm{SL}_2(K)$ nach einem Theorem aus Kapitel 3 der Vorlesung von den Elementarmatrizen $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in K$ erzeugt wird.

Aufgabe 11.3
Sei G eine topologische Gruppe, $U \subseteq G$ eine offene Umgebung des neutralen Elements $1 \in G$. Zeige:

a) Es gibt eine offene Teilmenge $V \subseteq G$ mit $1 \in V$ und $V \cdot V \subseteq U$, wobei $V \cdot V = \{z \in G \mid z = x \cdot y \text{ mit } x, y \in V\}$ sei.

b) Es gibt eine offene Teilmenge $W \subseteq G$ mit $1 \in W, W \subseteq U$ und $W = W^{-1}$.

Folgt aus a) und b), dass U eine offene Untergruppe von G enthält?

Bitte wenden.

Aufgabe 11.4
Betrachte die Gruppe $G = \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ der Permutationen der natürlichen Zahlen. Für $\sigma \in G$ und eine endliche Teilmenge $F \subseteq \mathbb{N}$ setzen wir

$$S_{\sigma,F} := \{\tau \in G \mid \tau(n) = \sigma(n) \text{ für alle } n \in F\}.$$

Die Teilmengen $S_{\sigma,F}$ bilden die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf G. Zeige:

a) G ist bzgl. der Topologie $\mathcal{T}$ eine topologische Gruppe.

b) Die Untergruppe $G_\omega = \{\sigma \in G \mid \sigma(n) = n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$ der Permutationen mit endlichem Träger ist dicht in G.

***-Aufgabe**
Halte Fragen zu der Vorlesung fest und schreibe Themen auf, die noch vertieft werden sollen. Die Vorschläge werden dann von Antoine aufgenommen und in einer Extra-Übung am Freitag, dem 15.7., (voraussichtlich) um 14 Uhr besprochen. Der Raum, in dem diese Übung stattfindet, wird rechtzeitig auf der Homepage bekanntgegeben.

Abgabe bis: Donnerstag, den 7.7.2016, 8 Uhr