11. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“
Musterlösung

SoSe 2016
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 11.1
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Es gibt unendlich viele Matrizen $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, die i als Eigenwert haben.

b) Es gibt eine Matrix in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit Eigenwert $\lambda = \sqrt{2}$.

c) Für $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ ist jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A ganz über $\mathbb{Z}$.

d) Ist jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ ganz über $\mathbb{Z}$, so hat A endliche Ordnung in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Lösung:

a) Diese Aussage ist wahr. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die Eigenwerte einer Matrix genau die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms sind. Da i eine Nullstelle des Polynoms $X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ ist, genügt es daher unendlich viele Matrizen anzugeben, die $X^2 + 1$ als charakteristisches Polynom besitzen.
Betrachte für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ die Matrix $A_n = \begin{pmatrix} n & 1 \\ -1-n^2 & -n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$.
Dann gilt

$$\det(A_n) = n \cdot (-n) - (-1-n^2) \cdot 1 = -n^2 + 1 + n^2 = 1$$

und A_n ist somit invertierbar in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$. Weiter gilt für das charakteristische Polynom $\chi(A_n)$:

$$\begin{aligned} \chi(A_n) = \det(X \cdot 1 - A_n) &= \det \begin{pmatrix} X-n & -1 \\ 1+n^2 & X+n \end{pmatrix} \\ &= (X-n)\cdot(X+n) - (1+n^2)\cdot(-1) \\ &= X^2 - n^2 + 1 + n^2 = X^2 + 1 \end{aligned}$$

Folglich hat A_n für jedes $n \in \mathbb{Z}$ den Eigenwert i. Damit gibt es unendlich viele Matrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit Eigenwert i.

b) Diese Aussage ist falsch. Wir beweisen dies per Widerspruch:
Angenommen, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ habe $\sqrt{2}$ als Eigenwert. Dann ist das charakteristische Polynom $\chi(A)$ von A ein normiertes Polynom über $\mathbb{Z}$ von Grad 2 mit Nullstelle $\sqrt{2}$. Wegen der Eindeutigkeit des Minimalpolynoms muss $\chi(A)$ damit schon das Minimalpolynom von $\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$ sein,

d.h. es gilt $\chi(A) = X^2 - 2$. Andererseits gilt nach Definition:

$$\begin{aligned}\chi(A) = \det(X \cdot 1 - A) &= \det\begin{pmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{pmatrix} \\ &= (X-a)\cdot(X-d) - b \cdot c \\ &= X^2 - (a+d)\cdot X + (ad-bc)\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $ad - bc = -2$ (und $a + d = 0$). Andererseits gilt wegen $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ aber:

$$ad - bc = \det(A) \in \{-1, 1\} \quad \lightning$$

Somit kann es keine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit Eigenwert $\sqrt{2}$ geben.

c) Diese Aussage trifft zu. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, so ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi(A)$ von A. Da $\chi(A)$ ein normiertes Polynom über $\mathbb{Z}$ ist, ist λ also ganz über $\mathbb{Z}$.

d) Diese Aussage ist falsch. Da nach c) die Eigenwerte aller Matrizen aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ ganz über $\mathbb{Z}$ sind, genügt es ein Element in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ anzugeben, dass unendliche Ordnung hat. Ein solches Element ist beispielsweise die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11.2

Sei K ein Körper mit $\#K \geq 4$. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(K)$ perfekt ist, d.h. dass $D\mathrm{SL}_2(K) = \mathrm{SL}_2(K)$ gilt. Ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ perfekt?

Lösung: Da $\mathrm{SL}_2(K)$ von den Elementarmatrizen $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in K$ erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass diese in der Kommutatorgruppe $D\mathrm{SL}_2(K)$ enthalten sind. Wir zeigen nun, dass die Elementarmatrizen sich sogar als Kommutatoren schreiben lassen.
Wegen $\#K \geq 4$ gibt es $\gamma \in K^*$ mit $\gamma^2 \neq 1$. (K enthält mindestens zwei Elemente, die nicht Nullstelle von $X^2 - 1$ sind und eins von diesen ist ungleich 0.)
Seien $\alpha, \beta \in K$ beliebig. Da γ invertierbar und $\gamma^2 \neq 1$ ist, sind $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{\gamma^2-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wohldefinierte Matrizen in $\mathrm{SL}_2(K)$. Weiter gilt für ihren Kommu-

tator:

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & \frac{\alpha}{\gamma^2-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma^{-1}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & \frac{\alpha}{\gamma^2-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma^{-1}\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1 & \frac{\alpha}{\gamma^2-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma^{-1}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & \frac{\alpha}{\gamma^2-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\gamma^{-1} & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & \frac{-\alpha}{\gamma^2-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\gamma & \frac{\gamma\alpha}{\gamma^2-1}\\ 0 & \gamma^{-1}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\gamma^{-1} & -\frac{\gamma^{-1}\alpha}{\gamma^2-1}\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & \gamma \cdot (-\frac{\gamma^{-1}\alpha}{\gamma^2-1}) + \frac{\gamma^2\alpha}{\gamma^2-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{-\alpha+\gamma^2\alpha}{\gamma^2-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Genauso erhält man $\left[\begin{pmatrix}\gamma^{-1} & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\beta}{\gamma^2-1} & 1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta & 1\end{pmatrix}$. Somit sind alle Elementarmatrizen Kommutatoren in $\mathrm{SL}_2(K)$ und es folgt $D\mathrm{SL}_2(K) = \mathrm{SL}_2(K)$.
$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist nicht perfekt. Dies kann man wie folgt sehen:
Die kanonische Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ induziert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Nun gilt nach Satz 23 aus Kapitel 3 der Vorlesung $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Sym}(3)$ und $\mathrm{Sym}(3)$ ist nicht perfekt. (Die Kommutatorgruppe von $\mathrm{Sym}(3)$ ist $\mathrm{Alt}(3)$.)
Da Bilder unter Homomorphismen von perfekten Gruppen wieder perfekt sind, ist daher auch die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nicht perfekt.

Aufgabe 11.3
Sei G eine topologische Gruppe, $U \subseteq G$ eine offene Umgebung des neutralen Elements $1 \in G$. Zeige:

a) Es gibt eine offene Teilmenge $V \subseteq G$ mit $1 \in V$ und $V \cdot V \subseteq U$, wobei $V \cdot V = \{z \in G \mid z = x \cdot y \text{ mit } x, y \in V\}$ sei.

b) Es gibt eine offene Teilmenge $W \subseteq G$ mit $1 \in W, W \subseteq U$ und $W = W^{-1}$.

Folgt aus a) und b), dass U eine offene Untergruppe von G enthält?

Lösung:

a) Da die Verknüpfung $m : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ stetig und $U \subseteq G$ offen ist, ist das Urbild $m^{-1}(U)$ offen in $G \times G$. Weiter enthält $m^{-1}(U)$ offenbar den Punkt $(1, 1)$. Da die Menge $\{U_1 \times U_2 \mid U_1, U_2 \subseteq G \text{ offen}\}$ eine Basis der Produkttopologie auf $G \times G$ bildet, gibt es offene Teilmengen $V_1, V_2 \subseteq G$ mit $(1, 1) \in V_1 \times V_2$ und $V_1 \times V_2 \subseteq m^{-1}(U)$. Setze nun $V := V_1 \cap V_2$. Als Schnitt von zwei offenen Mengen ist V offen in G und wegen $(1, 1) \in V_1 \times V_2$ enthält V das neutrale Element 1. Weiter gilt für alle $x, y \in V$:

$$x \cdot y = m(x, y) \in m(V \times V) \subseteq m(V_1 \times V_2) \subseteq U$$

Folglich gilt $V \cdot V \subseteq U$ und V erfüllt die geforderten Eigenschaften.

b) Da die Inversenbildung $i : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ stetig und damit ein selbstinverser Homöomorphismus von G ist, ist auch die Menge

$$i(U) = U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$$

offen in G. Wegen $1 = 1^{-1}$ gilt zudem $1 \in U^{-1}$. Setze $W := U \cap U^{-1}$. Dann ist W als Schnitt von zwei offenen Mengen offen in G und es gilt $1 \in W$. Desweiteren erhalten wir:

$$W^{-1} = (U \cap U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap (U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap U = W$$

Damit hat die offene Teilmenge $W \subseteq G$ alle gewünschten Eigenschaften.

Aus a) und b) folgt nicht, dass U eine offene Untergruppe enthält. In a) gilt $V \cdot V \subseteq U$, aber im Allgemeinen nicht $V \cdot V \subseteq V$, d.h. V ist nicht abgeschlossen unter Multiplikation.
Tatsächlich können wir ein einfaches Beispiel für eine offene Umgebung des neutralen Elements einer topologischen Gruppe angeben, welche keine offene Untergruppe enthält. Sei $G = \mathbb{R}$ die additive Gruppe der reellen Zahlen. Versehen wir $\mathbb{R}$ mit der (von der Betragsmetrik induzierten) Standardtopologie, so sind Addition und Inversenbildung nach Analysis I stetig und G somit eine topologische Gruppe. Sei $U = (-1, 1)$ das offene Intervall von -1 bis 1. Dann ist U offen in $G = \mathbb{R}$ und enthält das neutrale Element 0. Die einzige Untergruppe, die in U enthalten ist, ist die triviale Gruppe $\{0\}$. Diese ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 11.4
Betrachte die Gruppe $G = \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ der Permutationen der natürlichen Zahlen. Für $\sigma \in G$ und eine endliche Teilmenge $F \subseteq \mathbb{N}$ setzen wir

$$S_{\sigma,F} := \{\tau \in G \mid \tau(n) = \sigma(n) \text{ für alle } n \in F\}.$$

Die Teilmengen $S_{\sigma,F}$ bilden die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf G. Zeige:

a) G ist bzgl. der Topologie $\mathcal{T}$ eine topologische Gruppe.

b) Die Untergruppe $G_\omega = \{\sigma \in G \mid \sigma(n) = n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$ der Permutationen mit endlichem Träger ist dicht in G.

Lösung:

a) Es ist zu zeigen, dass die Multiplikation $m : G \times G \to G, (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau$ und die Inversenbildung $i : G \to G, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ stetige Abbildungen sind und dass alle einelementigen Teilmengen abgeschlossen in G sind.
Da die Teilmengen $S_{\sigma,F}$ (mit $\sigma \in G, F \subseteq \mathbb{N}$ endlich) eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ bilden, genügt es für die Stetigkeit zu zeigen, dass $m^{-1}(S_{\sigma,F})$ offen in $G \times G$ und $i^{-1}(S_{\sigma,F})$ offen in G sind.
Sei also $\sigma \in G$ beliebig und $F \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige endliche Teilmenge. Sei $(\tau_1, \tau_2) \in m^{-1}(S_{\sigma,F})$ beliebig. Dann gilt $\tau := \tau_1 \circ \tau_2 = m(\tau_1, \tau_2) \in S_{\sigma,F}$.
Nun ist $S_{\sigma\circ\tau_2^{-1},\tau_2(F)} \times S_{\tau_2,F}$ offen in $G \times G$. Wir zeigen nun, dass
$(\tau_1, \tau_2) \in S_{\sigma\circ\tau_2^{-1},\tau_2(F)} \times S_{\tau_2,F}$ und $S_{\sigma\circ\tau_2^{-1},\tau_2(F)} \times S_{\tau_2,F} \subseteq m^{-1}(S_{\sigma,F})$ gilt.
$\tau_2 \in S_{\tau_2,F}$ ist klar. Sei nun $n' \in \tau_2(F)$ beliebig. Dann gibt es $n \in F$ mit $\tau_2(n) = n'$. Wir erhalten:

$$\tau_1(n') = \tau_1(\tau_2(n)) = \tau_1 \circ \tau_2(n) = \sigma(n) = \sigma(\tau_2^{-1}(n')) = \sigma \circ \tau_2^{-1}(n')$$

Da $n' \in \tau_2(F)$ beliebig war, gilt $\tau_1 \in S_{\sigma\circ\tau_2^{-1},\tau_2(F)}$ nach Definition. Insgesamt gilt damit $(\tau_1,\tau_2) \in S_{\sigma\circ\tau_2^{-1},\tau_2(F)} \times S_{\tau_2,F}$.
Noch zu zeigen: $S_{\sigma\circ\tau_2^{-1},\tau_2(F)} \times S_{\tau_2,F} \subseteq m^{-1}(S_{\sigma,F})$
Sei $(\alpha,\beta) \in S_{\sigma\circ\tau_2^{-1},\tau_2(F)} \times S_{\tau_2,F}$ beliebig. Sei $n \in F$ beliebig.
Wegen $\beta \in S_{\tau_2,F}$ gilt $\beta(n) = \tau_2(n)$. Weiter gilt wegen $\tau_2(n) \in \tau_2(F)$ und $\alpha \in S_{\sigma\circ\tau_2^{-1},\tau_2(F)}$ schon $\alpha(\tau_2(n)) = \sigma\circ\tau_2^{-1}(\tau_2(n)) = \sigma(n)$. Insgesamt erhalten wir:

$$\alpha\circ\beta(n) = \alpha(\beta(n)) = \alpha(\tau_2(n)) = \sigma(n)$$

Da $n \in F$ beliebig war, gilt nach Definition $\alpha\circ\beta \in S_{\sigma,F}$ und somit $(\alpha,\beta) \in m^{-1}(S_{\sigma,F})$. Folglich gilt $S_{\sigma\circ\tau_2^{-1},\tau_2(F)} \times S_{\tau_2,F} \subseteq m^{-1}(S_{\sigma,F})$. Da $(\tau_1,\tau_2) \in m^{-1}(S_{\sigma,F})$ beliebig war, ist $m^{-1}(S_{\sigma,F})$ damit offen in $G\times G$ und die Multiplikation m auf G ist stetig.
Um zu zeigen, dass i stetig ist, beweisen wir $i^{-1}(S_{\sigma,F}) = S_{\sigma^{-1},\sigma(F)}$.
Sei $\tau \in i^{-1}(S_{\sigma,F})$ beliebig, also $\tau^{-1} \in S_{\sigma,F}$, d.h. $\tau^{-1}(n) = \sigma(n)$ für alle $n \in F$. Durch Umstellen erhalten wir $\tau\circ\sigma(n) = n$ für alle $n \in F$. Sei nun $n' \in \sigma(F)$ beliebig. Dann existiert $n \in F$ mit $n' = \sigma(n)$. Dann gilt:

$$\tau(n') = \tau(\sigma(n)) = n = \sigma^{-1}(n')$$

Also gilt $\tau(n') = \sigma^{-1}(n')$ für alle $n' \in \sigma(F)$ und dies bedeutet nach Definition $\tau \in S_{\sigma^{-1},\sigma(F)}$. Damit haben wir die Inklusion

$$i^{-1}(S_{\sigma,F}) \subseteq S_{\sigma^{-1},\sigma(F)}$$

gezeigt.
Umgekehrt gilt wegen $i^2 = \mathrm{id}$ und der oben gezeigten Inklusion:

$$\begin{aligned} S_{\sigma^{-1},\sigma(F)} &= i^{-1}(i^{-1}(S_{\sigma^{-1},\sigma(F)})) \\ &\subseteq i^{-1}(S_{(\sigma^{-1})^{-1},\sigma^{-1}(\sigma(F))}) \\ &= i^{-1}(S_{\sigma,F}) \end{aligned}$$

Es ist also $i^{-1}(S_{\sigma,F}) = S_{\sigma^{-1},\sigma(F)}$ und die Abbildung i ist stetig.
Sei $\sigma \in G$ beliebig. Sei weiter $\tau \in G$ mit $\tau \neq \sigma$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\tau(n) \neq \sigma(n)$. Insbesondere gilt $\sigma \notin S_{\tau,\{n\}}$, d.h. $S_{\tau,\{n\}} \subseteq G\setminus\{\sigma\}$. Somit ist $G\setminus\{\sigma\}$ offen in G und $\{\sigma\}$ ist abgeschlossen in G.
Da m und i bzgl. $\mathcal{T}$ stetig und alle einelementigen Teilmengen von G abgeschlossen sind, ist G eine topologische Gruppe.

b) Sei U eine offene Teilmenge von G. Zu zeigen: $U \cap G_\omega \neq \emptyset$
Da U offen bzgl. $\mathcal{T}$ ist, gibt es $\sigma \in G$ und eine endliche Teilmenge $F \subseteq \mathbb{N}$ mit $S_{\sigma,F} \subseteq U$. Sei $m := \max F \cup \sigma(F)$. Dann definiert die Einschränkung $\sigma|_F$ eine injektive Abbildung $F \to \{1,\dots,m\}$. Sei $\tilde{\tau}$ eine beliebige Fortsetzung von $\sigma|_F$ zu einer Bijektion der Menge $\{1,\dots,m\}$. Nun definiere
$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} \tilde{\tau}(n) & 1 \leq n \leq m \\ n & m+1 \leq n \end{cases}$.
Dann ist τ eine Permutation von $\mathbb{N}$ mit endlichem Träger, d.h. $\tau \in G_\omega$.
Desweiteren gilt wegen $F \subseteq \{1,\dots,m\}$ nach Konstruktion $\tau|_F = \tilde{\tau}|_F = \sigma|_F$ und somit $\tau \in S_{\sigma,F}$.
Wegen $\tau \in S_{\sigma,F} \cap G_\omega \subseteq U \cap G_\omega$ gilt $U \cap G_\omega \neq \emptyset$. Da $U \subseteq G$ eine beliebige offene Teilmenge war, ist G_ω dicht in G.