10. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 10.1
Sei R ein Ring, $I \trianglelefteq R$ ein beidseitiges Ideal und $U := R^*$ die Einheitengruppe. Definiere
$$U_1 := \{u \in U \mid u - 1 \in I\}.$$
Zeige, dass U_1 ein Normalteiler in U ist.

Aufgabe 10.2
Betrachte in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ den Teilring $\mathbb{Z}[i] = \{a+b\cdot i \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Zeige: $\mathbb{Z}[i]$ ist ein euklidischer Ring.

Aufgabe 10.3
Betrachte die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(2) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid A^T \cdot A = 1\}$. Sei $G \subseteq \mathrm{SO}(2)$ eine endliche Untergruppe. Zeige: G ist zyklisch.

Aufgabe 10.4
Bestimme alle Primzahlen, die als Ordnung eines Elements in $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ vorkommen.

Hinweis: Übertrage die Argumente aus dem Beweis von Satz 23 in Kapitel 3 der Vorlesung.

Bitte wenden.

***-Aufgabe**
Sei G eine endliche Gruppe und V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem G durch lineare Transformationen wirkt. Sei $U \subseteq V$ ein G-invarianter Unterraum, d.h. ein Untervektorraum mit $g(U) = U$ für alle $g \in G$.
Zeige: U hat ein G-invariantes Komplement, d.h. es gibt einen G-invarianten Unterraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.
Man sagt dann, die Darstellung von G auf V ist *vollständig reduzibel.*

Hinweis: Konstruiere ein G-invariantes Skalarprodukt auf V.

Abgabe bis: Donnerstag, den 30.6.2016, 8 Uhr