

## 1. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie 2“

SoSe 2016  
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer  
Nils Leder  
Antoine Beljean

---

### Aufgabe 1.1

Häufig wird der Begriff der quasi-Isometrie wie folgt eingeführt:

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen  $X, Y$  heißt *quasi-isometrische Einbettung*, wenn es Konstanten  $\lambda \geq 1$  und  $\varepsilon \geq 0$  gibt, so dass

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - \varepsilon \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + \varepsilon$$

für alle  $x_1, x_2 \in X$  gilt. Eine quasi-isometrische Einbettung  $f$  heißt dann *quasi-Isometrie*, wenn es eine Konstante  $R \geq 0$  gibt, so dass für alle  $y \in Y$  ein  $x \in X$  mit  $d(f(x), y) \leq R$  existiert.

Zeige: Diese Definition von quasi-Isometrie ist äquivalent zu der Definition in der Vorlesung.

### Aufgabe 1.2

Zeige, dass die Relation metrischer Räume, quasi-isometrisch zueinander zu sein, eine Äquivalenzrelation ist.

### Aufgabe 1.3

Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe und  $N$  ein Normalteiler in  $G$ . Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent zueinander sind:

- i)  $N$  ist endlich.
- ii) Die kanonische Projektion  $G \rightarrow G/N$  ist eine quasi-Isometrie.

### Aufgabe 1.4

Zeige, dass für natürliche Zahlen  $n \neq m$  die reellen Vektorräume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  (versehen mit beliebigen Normen) nicht zueinander quasi-isometrisch sind.

*Hinweis:* Benutze das Milnor-Švarc-Lemma. Es darf verwendet werden, dass  $\mathbb{Z}^n$  und  $\mathbb{Z}^m$  für  $n \neq m$  nicht quasi-isometrisch sind.

*Bitte wenden.*

*Definition:* Zwei Gruppen  $G$  und  $H$  heißen *kommensurabel*, wenn es Untergruppen  $G' \subseteq G$  und  $H' \subseteq H$  mit  $[G : G'] < \infty$ ,  $[H : H'] < \infty$  und  $G' \cong H'$  gibt.

**\*-Aufgabe**

Zeige:

- a) Die Kommensurabilität zwischen Gruppen ist eine Äquivalenzrelation.
- b) Sind  $G, H$  endlich erzeugte Gruppen, die zueinander kommensurabel sind, so sind  $G$  und  $H$  zueinander quasi-isometrisch.
- c) Für welche  $m, n \in \mathbb{N}$  sind  $F_n$  und  $F_m$  kommensurabel?

Abgabe bis: Donnerstag, den 21.4.2016, 8 Uhr