11. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 11.1
Seien $\Gamma = (V, E)$ und $\Gamma' = (V', E')$ zusammenhängende Graphen und $x \in V$, $x' \in V'$.
Beweise: Gilt $\pi_1(|\Gamma|, x) \cong \pi_1(|\Gamma'|, x')$, so ist $|\Gamma|$ homotopieäquivalent zu $|\Gamma'|$.

Aufgabe 11.2

a) Sei $\Gamma = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\#V > 1$. Sei G eine Gruppe, die auf Γ wirkt. Für $v \in V$ definiere die *Nachbarn* einer Ecke als die Elemente der Menge

$$S(v, 1) = \{w \in V \setminus \{v\} \mid \text{es gibt } e \in E \text{ mit } e_0 = v \text{ und } e_1 = w\}.$$

Zeige: Sind die beiden Bedingungen

i) Für alle $v \in V$ und alle $w_1, w_2 \in S(v, 1)$ existiert ein $h \in G$ mit $h(w_1) = w_2$.

ii) Es gibt $v_0 \in V$ und $g \in G$ so, dass $g(v_0) \in S(v_0, 1)$ ein Nachbar von v_0 ist.

erfüllt, so wirkt G transitiv auf V.

b) Gebe je ein Beispiel für eine nicht-transitive Wirkung einer Gruppe G auf einen Graphen Γ so, dass

- *i)* und *ii)* gelten, Γ aber nicht zusammenhängend ist.
- *i)* gilt und Γ zusammenhängend ist, aber *ii)* nicht erfüllt ist.
- *ii)* gilt und Γ zusammenhängend ist, aber *i)* nicht erfüllt ist.

Aufgabe 11.3
Zeichne die Cayleygraphen der folgenden Gruppen G_i bzgl. des jeweiligen Erzeugendensystems S_i:

i) $G_1 = \mathbb{Z}$ mit $S_1 = \{2, 3\}$

ii) $G_2 = \mathrm{Sym}(3)$ mit $S_2 = \{(12), (23)\}$

iii) $G_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ mit $S_3 = \{(1 + 2\mathbb{Z}, 0), (0, 1 + 8\mathbb{Z})\}$

iv) $G_4 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ mit $S_4 = \{s, t\}$, wobei s ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und t ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sei

Bitte wenden.

Aufgabe 11.4
Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem. Für einen Kantenweg $\alpha = (e_1, \ldots, e_n)$ im Cayleygraph $\Gamma(G, S)$ mit $(e_1)_0 = (e_n)_1 = 1 \in G$ sei $s_\alpha := s(e_1) \cdot s(e_2) \cdot \ldots \cdot s(e_n)$, wobei $s(e_i) \in S \cup S^{-1}$ mit $(e_i)_0 \cdot s(e_i) = (e_i)_1$ sei.
Zeige: G besitzt die Präsentierung

$$G \cong \langle S \mid \{s_\alpha \mid \alpha \text{ Kantenweg in } \Gamma(G,S) \text{ von 1 nach 1}\}\rangle.$$

***-Aufgabe**
Sei X der topologische Raum, der aus einem 2-Torus entsteht, indem in einem Punkt ein Kreis angeklebt wird. Formal: Sei $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ der 2-Torus und $p := (1,0) \in S^1$. Definiere eine Äquivalenzrelation auf $S^1 \dot\cup \mathbb{T}^2$ durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x = y \vee (x = p \wedge y = (p,p)) \vee (x = (p,p) \wedge y = p)$$

und setze $X := (S^1 \dot\cup \mathbb{T}^2)/\sim$ (versehen mit der Quotiententopologie).
Bestimme die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$, wobei $x_0 = [p]$ die Äquivalenzklasse von p sei.

Abgabe bis: Donnerstag, den 28.1.2016, 8 Uhr