10. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 10.1
Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph und $|\Gamma|$ die geometrische Realisierung von Γ. Zeige:

a) $|\Gamma|$ ist Hausdorffsch.

b) $|\Gamma|$ ist kompakt genau dann, wenn die Mengen V und E endlich sind.

c) Ist $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ein Teilgraph, so ist $|\Gamma'|$ abgeschlossen in $|\Gamma|$.

Aufgabe 10.2
Sei X ein topologischer Raum.

a) Sei $A \subseteq X$ ein Unterraum und $r : X \to A$ eine Retraktion. Zeige: Ist X kontrahierbar, dann ist auch A kontrahierbar.

b) Beweise: X ist genau dann kontrahierbar, wenn für jeden topologischen Raum Y jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Definition: Ein zusammenhängender Graph $\Gamma = (V, E)$ heißt *Baum*, wenn er keine Kreise enthält, d.h. wenn es in Γ keinen reduzierten Kantenweg $(e_1, \ldots, e_n)$ mit $(e_1)_0 = (e_n)_1$ gibt.

Aufgabe 10.3
Sei Γ ein Baum, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und seien $T_1, \ldots, T_n$ Teilbäume von Γ. Zeige: Gilt $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt $\bigcap\limits_{i=1}^{n} T_i \neq \emptyset$.

Aufgabe 10.4
Sei $G \neq \{1\}$ eine Gruppe. Zeige:

a) Hat G Exponenten $n < \infty$, so ist G nicht divisibel.

b) Ist G residuell endlich, so ist G nicht divisibel.

Bitte wenden.

***-Aufgabe**
Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $B_r^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 < r\}$ der Ball um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ mit Radius r.
Sei weiter $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $\varphi : U \to B_1^3$ ein Homöomorphismus. Sei $V := \varphi^{-1}(\bar{B}^3_{\frac{1}{2}}))$ und $X \setminus V$ wegzusammenhängend.
Zeige: Für $x_0 \in U \setminus V$ gilt $\pi_1(X \setminus V, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 21.1.2016, 8 Uhr