# 10. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“
Musterlösung

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

---

**Aufgabe 10.1**
Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph und $|\Gamma|$ die geometrische Realisierung von $\Gamma$. Zeige:

a) $|\Gamma|$ ist Hausdorffsch.

b) $|\Gamma|$ ist kompakt genau dann, wenn die Mengen $V$ und $E$ endlich sind.

c) Ist $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ein Teilgraph, so ist $|\Gamma'|$ abgeschlossen in $|\Gamma|$.

*Lösung*: Um die Notation zu vereinfachen, arbeiten wir in dieser Aufgabe ohne eine Orientierung des Graphen $\Gamma$. Wir definieren $|\Gamma|$ daher als den Quotientenraum

$$|\Gamma| = (V\dot{\cup}(E \times [0, 1)]))/\sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben ist, durch $(e, 0) \sim e_0, (e_1) \sim e_1$ und $(e, s) \sim (\bar{e}, 1 - s)$ für alle $e \in E, s \in [0, 1]$. Wie in der Vorlesung bezeichne $e_s$ die Äquivalenzklasse von $(e, s)$.

a) Seien $x, y \in |\Gamma|$ mit $x \neq y$ beliebig. Zu zeigen: Es gibt offene Mengen $U, V \subseteq |\Gamma|$ mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.
Wir weisen dies nach, indem wir verschiedene Fälle betrachten:
<u>Fall 1</u>: $x$ und $y$ sind Ecken.
Dann ist $U = U_x := \{e_s \mid e \in E, e_0 = x, 0 \leq s < \frac{1}{2}\}$ (bzw. $U = \{x\}$ falls $x \neq e_0$ für alle $e \in E$) eine offene Umgebung von $x$ in $|\Gamma|$. Genauso ist $V = U_y := \{e_s \mid e \in E, e_0 = y, 0 \leq s < \frac{1}{2}\}$ eine offene Umgebung von $y$ in $|\Gamma|$. Es bleibt zu zeigen, dass $U$ und $V$ disjunkt sind.
Per Widerspruch: Sei $p \in U \cap V$. Dann gibt es $e, e' \in E$ und $s, t \in [0, \frac{1}{2})$ mit $p = e_s$ und $p = e'_t$. Wegen $e_0 = x \neq y = e'_0$ gilt $e \neq e'$ und $s, t \neq 0$. Nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ bedeutet dies $e' = \bar{e}$ und $t = 1 - s$. Wegen $0 \leq s, t < \frac{1}{2}$ gilt aber $1 - s > \frac{1}{2}$, also $t \neq 1 - s$. $\lightning$
Somit sind $U$ und $V$ disjunkt.
<u>Fall 2</u>: $x$ ist Ecke und $y = e_s$ mit $e \in E, s \in (0, 1)$.
Wegen $s \in (0, 1)$ existiert $\varepsilon > 0$ so, dass $0 < s - 2\varepsilon$ und $s + 2\varepsilon < 1$ gilt. Dann ist $U := \{e'_t \mid e' \in E, e'_0 = x, 0 \leq t < \varepsilon\}$ (bzw. $U = \{x\}$ falls $x \neq e_0$ für alle $e \in E$) eine offene Umgebung von $x$ und $V := \{e_t \mid t \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)\}$ von $y$. Da $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ nach Wahl von $\varepsilon$ disjunkt zu $[0, \varepsilon)$ und $(1 - \varepsilon, 1]$ ist, sind $U$ und $V$ nach Definition von $\sim$ disjunkt.
<u>Fall 3</u>: $x = e_s$ und $y = e'_t$ mit $e, e' \in E, s, t \in (0, 1)$.
Gilt $e = e'$, so gilt $s \neq t$. Da $(0, 1)$ Hausdorffsch ist, gibt es dann offene Intervalle $I, J \subseteq (0, 1)$ mit $s \in I, t \in J$ und $I \cap J = \emptyset$.
Dann sind $U := \{e_{s'} \mid s' \in I\}$ und $V := \{e_{t'} \mid t' \in J\}$ disjunkte offene Umgebungen von $x$ bzw. $y$.

Gilt $e' = \bar{e}$, so können wir $e'$ durch $e$ und $t$ durch $1-t$ ersetzen und wie oben argumentieren.
Gilt $e' \notin \{e, \bar{e}\}$, so wähle $\varepsilon > 0$ mit $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq (0,1)$ und $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq (0,1)$. Dann ist $U := \{e_{s'} \mid s' \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)\}$ eine offene Umgebung von $x$, $V := \{e'_{t'} \mid t' \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\}$ eine offene Umgebung von $y$ und $U$ und $V$ sind disjunkt.
Da es in jedem Fall offene Umgebungen $U$ von $x$ und $V$ von $y$ gibt, die disjunkt zueinander sind, ist $|\Gamma|$ Hausdorffsch.

b) „$\Rightarrow$“ Sei $|\Gamma|$ kompakt. Betrachte die folgende offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von $|\Gamma|$: Für jede Ecke $v \in V$ setzen wir $U_v := \{e_t \mid e \in E, e_0 = v, t \in [0, \frac{1}{3})\}$ bzw. $U_v := \{v\}$ falls $v \neq e_0$ für alle $e \in E$. Dann gilt $U_v \neq U_w$ für $u, w \in V$ mit $u \neq w$. ($U_v$ und $U_w$ sind dann sogar disjunkt zueinander.)
Für jede Kante $e \in E$ setze $U_e := \{e_t \mid t \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})\}$. Es gilt $U_e = U_{\bar{e}}$ und für $e, e' \in E$ mit $e' \notin \{e, \bar{e}\}$ gilt $U_e \neq U_{e'}$. (Wiederum gilt sogar $U_e \cap U_{e'} = \emptyset$.)
Nun definiere $\mathcal{U} = \{U_v \mid v \in V\} \cup \{U_e \mid e \in E\}$.
Da die Intervalle $[0, \frac{1}{3}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ und $(\frac{2}{3}, 1]$ das Intervall $[0,1]$ überdecken und $e_t = \bar{e}_{1-t}$ gilt, ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $|\Gamma|$. Da $|\Gamma|$ kompakt ist, enthält $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}'$.
Nach Konstruktion ist $U_v$ für $v \in V$ die einzige Menge aus $\mathcal{U}$, die $v$ enthält. Genauso ist $U_e = U_{\bar{e}}$ für $e \in E$ die einzige Menge in $\mathcal{U}$ welche den Mittelpunkt $e_{\frac{1}{2}}$ der Kante $e$ enthält. Da $\mathcal{U}'$ den Raum $|\Gamma|$ überdeckt, folgt damit $U_v \in \mathcal{U}'$ für alle $v \in V$ und $U_e \in \mathcal{U}'$ für alle $e \in E$, d.h. $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$. Damit ist $\mathcal{U}$ endlich, also auch die Mengen $V$ und $E$.
„$\Leftarrow$“ Seien $V$ und $E$ endlich. Dann sind $V$ und $E$ mit der diskreten Topologie kompakt. Weiter ist $E \times [0,1]$ als Produkt kompakter Räume kompakt und $V \dot\cup (E \times [0,1])$ ist als endliche Vereinigung kompakter Räume ebenfalls kompakt. Nun ist $|\Gamma|$ als Quotient des kompakten Raums $V \dot\cup (E \times [0,1])$ kompakt.

c) Sei $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ein Teilgraph. Sei $V' \subseteq V$ die Eckenmenge und $E' \subseteq E$ die Kantenmenge von $\Gamma'$.
Wir zeigen, dass $|\Gamma'|$ abgeschlossen in $|\Gamma|$ ist, indem wir nachweisen, dass das Komplement $|\Gamma| \setminus |\Gamma'|$ offen ist.
Sei $x \in |\Gamma| \setminus |\Gamma'|$ beliebig. Gilt $x = e_s$ mit $s \in (0,1)$, so ist $e \notin E'$ und es gilt $e_t \notin |\Gamma'|$ für alle $t \in (0,1)$. (Hier benutzen wir, dass nach Definition eines Teilgraphen wegen $e \notin E'$ auch $\bar{e} \notin E'$ gilt.) Somit ist $U = \{e_t \mid t \in (0,1)\}$ eine offene Umgebung von $x$ mit $U \subseteq |\Gamma| \setminus |\Gamma'|$.
Andernfalls gilt $x \in V$. Wegen $x \notin V'$ gilt $e \notin E'$ für alle $e \in E$ mit $e_0 = x$. Und für solche Kanten gilt wie oben $e_t \notin |\Gamma'|$ für alle $t \in [0,1)$. Also ist $U := \{e_t \mid e \in E, e_0 = x, t \in [0, \frac{1}{2})\}$ (bzw. $U = \{x\}$ falls $x \neq e_0$ für alle $e \in E$) eine offene Umgebung von $x$ mit $U \subseteq |\Gamma| \setminus |\Gamma'|$.
Da $x \in |\Gamma| \setminus |\Gamma'|$ beliebig war, ist $|\Gamma| \setminus |\Gamma'|$ offen. Also ist $|\Gamma'|$ abgeschlossen in $|\Gamma|$.

**Aufgabe 10.2**
Sei $X$ ein topologischer Raum.

a) Sei $A \subseteq X$ ein Unterraum und $r : X \to A$ eine Retraktion. Zeige: Ist $X$ kontrahierbar, dann ist auch $A$ kontrahierbar.

b) Beweise: $X$ ist genau dann kontrahierbar, wenn für jeden topologischen Raum $Y$ jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

*Lösung*:

a) Sei $X$ kontrahierbar. Dann ist $\mathrm{id}_X$ homotop zu einer konstanten Abbildung $\mathrm{const}_p : X \to X, x \mapsto p$ für ein $p \in X$.
Also existiert eine Homotopie $\varphi : X \times [0,1] \to X, (x,s) \mapsto \varphi_s(x)$ mit $\varphi_0(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$ und $\varphi_1(x) = \mathrm{const}_p(x) = p$ für alle $x \in X$. Betrachte nun die Abbildung $r \circ \varphi : X \times [0,1] \to A$. Sei $\psi = (r \circ \varphi)|_{A \times [0,1]}$ die Einschränkung von $r \circ \varphi$ auf $A \times [0,1]$.
Da $r$ und $\varphi$ stetig sind, ist $\psi$ als Einschränkung einer stetigen Abbildung stetig. Zudem gilt für alle $a \in A$:

$$\psi_0(a) = r(\varphi_0(a)) = r(a) = a = \mathrm{id}_A(a)$$
$$\psi_1(a) = r(\varphi_1(a)) = r(p) = \mathrm{const}_{r(p)}(a)$$

Somit ist $\mathrm{id}_A$ homotop zu der konstanten Abbildung $\mathrm{const}_{r(p)} : A \to A$, $a \mapsto r(p)$ und $A$ ist nach Definition kontrahierbar.

b) „$\Leftarrow$“ Sei für jeden topologischen Raum $Y$ jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ homotop zu einer konstanten Abbildung. Dann ist insbesondere für $Y = X$ die Abbildung $\mathrm{id}_X$ homotop zu einer konstanten Abbildung. Folglich ist $X$ kontrahierbar.
„$\Rightarrow$“ Sei $X$ kontrahierbar. Dann existiert eine Homotopie $\varphi : X \times [0,1] \to X$, $(x,s) \mapsto \varphi_s(x)$, sodass $\varphi_0 = \mathrm{id}_X$ gilt und $\varphi_1$ eine konstante Abbildung ist. Sei $Y$ ein beliebiger topologischer Raum und $f : X \to Y$ stetig. Nun ist $f \circ \varphi : X \times [0,1] \to Y$ eine stetige Abbildung und definiert eine Homotopie zwischen $f \circ \varphi_0 = f \circ \mathrm{id}_X = f$ und der konstanten Abbildung $f \circ \varphi_1$.

**Aufgabe 10.3**
Sei $\Gamma$ ein Baum, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und seien $T_1, \ldots, T_n$ Teilbäume von $\Gamma$. Zeige: Gilt $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt $\bigcap\limits_{i=1}^{n} T_i \neq \emptyset$.

*Lösung*: Wir beginnen mit folgender Vorüberlegung: Sind $v, w$ Ecken in einem Baum, so gibt es einen eindeutigen reduzierten Kantenweg von $v$ nach $w$.
(Die Existenz ist klar, da Bäume nach Definition zusammenhängend sind.)
Per Widerspruch: Angenommen, $(e_1, \ldots, e_n)$ und $(e'_1, \ldots, e'_m)$ sind zwei verschiedene reduzierte Kantenwege von $v$ nach $w$. Ohne Einschränkung gelte $e_n \neq e'_m$ (ansonsten betrachte die Anfangsstücke $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ und $(e'_1, \ldots, e'_{m-1})$ usw.). Dann ist aber $(e_1, \ldots, e_n, \bar{e}'_m, \ldots \bar{e}'_1)$ ein reduzierter Kantenweg von $v$ nach $v$, also ein Kreis. Ein Baum enthält aber keine Kreise. $\lightning$
Nun zeigen wir die Behauptung durch Induktion nach $n$.
Induktionsanfang: Für $n = 2$ ist nichts zu zeigen. Sei $n = 3$. (Wir benötigen diesen Fall nachher im Induktionsschritt.)
Per Widerspruch: Angenommen, es ist $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \emptyset$. Nach Voraussetzung sind $T_1 \cap T_2, T_2 \cap T_3$ und $T_2 \cap T_3$ nicht-leer. Seien $x \in V(T_1) \cap V(T_2), y \in V(T_2) \cap V(T_3)$ und $(e_1, \ldots, e_m)$ ein Kantenweg von $x$ nach $y$ (existiert da $\Gamma$ zusammenhängend

ist), sodass es keinen kürzeren Kantenweg zwischen Ecken in $T_1 \cap T_2$ und $T_2 \cap T_3$ gibt. Sei $z \in V(T_1) \cap V(T_3)$ und $(f_1, \ldots, f_r)$ ein Kantenweg von $y$ nach $z$, sodass kein kürzerer Kantenweg von $y$ zu einer Ecke in $T_1 \cap T_3$ existiert. Sei weiter $(g_1, \cdots, g_s)$ ein kürzester Kantenweg von $z$ nach $x$. Wegen $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \emptyset$ gilt $m, r, s \geq 1$.
Behauptung: Der Kantenweg $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s)$ ist reduziert.
Beweis: Da die Teilstücke $(e_1, \ldots, e_n), (f_1, \ldots, f_r)$ und $(g_1, \ldots, g_s)$ kürzeste Verbindungsstrecken sind, sind sie reduziert. Es genügt also zu zeigen, dass $f_1 \neq \bar{e}_n$ und $g_1 \neq \bar{f}_r$ gilt.
Nach Vorüberlegung gilt $e_i \in E(T_2)$ für $i = 1, \ldots, n$. Denn in $\Gamma$ existiert ein eindeutiger reduzierter Weg von $x$ nach $y$. Da $x, y \in V(T_2)$ gilt und $T_2$ ein Baum ist, existiert ein reduzierter Weg von $x$ nach $y$ in $T_2$. Wegen der Eindeutigkeit stimmen diese überein. Genauso gilt $f_i \in E(T_3)$ für alle $i = 1, \ldots, r$.
Ist nun $f_1 = \bar{e}_n$, so liegt wegen $e_n \in E(T_2)$ und $f_1 \in E(T_3)$ die Ecke $v := (e_n)_0 = (f_1)_1$ im Durchschnitt $V(T_2) \cap V(T_3)$. Dann ist $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ ein Kantenweg von $x$ nach $v$ und damit ein kürzerer Kantenweg zwischen Ecken in $T_1 \cap T_2$ und $T_2 \cap T_3$ als $(e_1, \ldots, e_n)$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von $(e_1, \ldots, e_n)$. $\lightning$
Daher gilt $f_1 \neq \bar{e}_n$.
Wie oben sehen wir, dass $g_i \in E(T_1)$ für alle $i = 1, \ldots, s$ gilt. Ist $g_1 = \bar{f}_r$, so liegt die Ecke $w := (f_r)_0 = (g_1)_1$ im Durchschnitt $V(T_1) \cap V(T_3)$. Somit ist $(f_1, \ldots, f_{r-1})$ ein Kantenweg von $y$ nach $w$, d.h. ein kürzerer Kantenweg als $(f_1, \ldots, f_r)$ von $y$ zu einer Ecke in $T_1 \cap T_3$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von $(f_1, \ldots, f_r)$. $\lightning$
Folglich gilt $g_1 \neq \bar{f}_r$.
Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s)$ ein reduzierter Kantenweg ist. Dieser beginnt in $(e_1)_0 = x$ und endet in $(g_s)_1 = x$. Mit anderen Worten ist $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s)$ ein Kreis in $\Gamma$. Da $\Gamma$ nach Voraussetzung ein Baum ist, ist dies unmöglich. $\lightning$
Die Annahme $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \emptyset$ war also falsch und der Fall $n = 3$ ist gezeigt.
Induktionsschritt: Sei die Aussage richtig für ein beliebiges $n \geq 3$.
z.z.: Die Aussage gilt für $n+1$, d.h. für $n+1$ Teilbäume $T_1, \ldots, T_{n+1}$ des Baums $\Gamma$ mit $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ gilt schon $\bigcap_{i=1}^{n+1} T_i \neq \emptyset$.
Wir wollen die Induktionsvoraussetzung anwenden, indem wir $T_1$ und $T_2$ durch ihren Durchschnitt $T_1 \cap T_2$ ersetzen.
Behauptung: $T_1 \cap T_2$ ist ein Baum.
Beweis: Als Teilgraph des Baums $\Gamma$ enthält $T_1 \cap T_2$ keine Kreise. Es genügt daher zu zeigen, dass der Graph $T_1 \cap T_2$ zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung ist $T_1 \cap T_2$ nicht-leer.
Seien $x, y \in V(T_1) \cap V(T_2)$ beliebig. Da $T_1$ ein Baum ist, existiert nach Vorüberlegung ein reduzierter Kantenweg $\alpha_1$ in $T_1$ von $x$ nach $y$. Genauso existiert ein reduzierter Kantenweg $\alpha_2$ in $T_2$ von $x$ nach $y$. Weiter ist $\Gamma$ ein Baum und nach Vorüberlegung gibt es genau einen reduzierten Kantenweg von $x$ nach $y$ in $\Gamma$. Dies impliziert $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\alpha_1$ ist ein (reduzierter) Kantenweg von $x$ nach $y$ in $T_1 \cap T_2$. Damit ist $T_1 \cap T_2$ zusammenhängend, also ein Baum.
Behauptung: Es gilt $(T_1 \cap T_2) \cap T_j \neq \emptyset$ für $j = 3, \ldots, n+1$.
Beweis: Sei $j \in \{3, \ldots, n+1\}$ beliebig. Nach Voraussetzung sind $T_1 \cap T_2, T_1 \cap T_j$ und $T_2 \cap T_j$ nicht-leer. Mit dem Fall $n = 3$ folgt daher $T_1 \cap T_2 \cap T_j \neq \emptyset$.
Nun sind $T_1 \cap T_2, T_3, \ldots, T_{n+1}$ $n$ Teilbäume von $\Gamma$ mit paarweise nicht-leerem

Durchschnitt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher:

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} T_i = T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_{n+1} = (T_1 \cap T_2) \cap T_3 \cap \ldots \cap T_{n+1} \neq \emptyset$$

**Aufgabe 10.4**
Sei $G \neq \{1\}$ eine Gruppe. Zeige:

a) Hat $G$ Exponenten $n < \infty$, so ist $G$ nicht divisibel.

b) Ist $G$ residuell endlich, so ist $G$ nicht divisibel.

*Lösung*:

a) Sei $g \in G$ mit $g \neq 1$ . Da $G$ Exponent $n$ hat, gilt $h^n = 1 \neq g$ für alle $h \in G$. Somit ist $G$ nicht divisibel.

b) Wir zeigen zuerst: Ist $G$ divisibel und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist auch das Bild $f(G) \subseteq H$ divisibel.
Seien $h \in f(G), n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ beliebig. Sei $g \in G$ mit $f(g) = h$. Da $G$ divisibel ist, existiert $u \in G$ mit $u^n = g$. Dann gilt $f(u)^n = f(u^n) = f(g) = h$. Somit ist $f(G)$ divisibel.
Sei nun $G$ residuell endlich. Per Widerspruch: Angenommen, $G$ ist divisibel. Sei $g \in G$ mit $g \neq 1$. Da $G$ residuell endlich ist, existiert eine endliche Gruppe $H$ und ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ mit $f(g) \neq 1$. Nach der Vorüberlegung ist $f(G)$ divisibel und es gilt $f(G) \neq \{1\}$ wegen $f(g) \neq 1$. Als Untergruppe der endlichen Gruppe $H$ besitzt $f(G)$ aber einen endlichen Exponenten. Dies steht im Widerspruch zu Teil a). ↯
Somit war die Annahme falsch und $G$ ist nicht divisibel.

***-Aufgabe**
Sei $X$ ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $B^3_r := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 < r\}$ der Ball um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ mit Radius $r$.
Sei weiter $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $\varphi : U \to B^3_1$ ein Homöomorphismus.
Sei $V := \varphi^{-1}(\bar{B}^3_{\frac{1}{2}})$ und $X \setminus V$ wegzusammenhängend.
Zeige: Für $x_0 \in U \setminus V$ gilt $\pi_1(X \setminus V, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$.

*Lösung*: Wir wollen den Satz von Seifert-van Kampen auf die Überdeckung von $X$ durch die offenen Mengen $U$ und $X \setminus V$ anwenden. Dazu betrachten wir zunächst deren Durchschnitt. Es gilt:

$$U \cap (X \setminus V) = U \setminus V = \varphi^{-1}(B^3_1) \setminus \varphi^{-1}(\bar{B}^3_{\frac{1}{2}}) = \varphi^{-1}(B^3_1 \setminus \bar{B}^3_{\frac{1}{2}})$$

Mit der Einschränkung des Homöomorphismus $\varphi$ auf $U \setminus V$ erhalten wir:

$$U \setminus V \cong B^3_1 \setminus \bar{B}^3_{\frac{1}{2}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2} < \|x\| < 1\}$$

$U \setminus V$ ist damit homöomorph zu einer „aufgedickten“ 2-Sphäre, insbesondere ist $U \setminus V$ wegzusammenhängend. Weiter ist $U$ homöomorph zu einem offenen Ball

in $\mathbb{R}^3$, also wegzusammenhängend und $X \setminus V$ ist wegzusammenhängend nach Voraussetzung.
Somit sind die Voraussetzungen für den Satz von Seifert-van Kampen erfüllt und wir erhalten $\pi_1(X, x_0) \cong \varinjlim(\pi_1(U, x_0) \leftarrow \pi_1(U \setminus V, x_0) \rightarrow \pi_1(X \setminus V, x_0))$.
Nun zeigen wir, dass $\pi_1(U, x_0)$ und $\pi_1(U \setminus V, x_0)$ trivial sind.
Da $U$ homöomorph zu einem offenen Ball in $\mathbb{R}^3$ ist, ist $U$ kontrahierbar und es folgt $\pi_1(U, x_0) = \{1\}$.
Weiter ist $U \setminus V$ homöomorph zu $Y := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2} < \|x\| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Es genügt also zu zeigen, dass $Y$ eine triviale Fundamentalgruppe besitzt.
Dafür konstruieren wir folgende Deformationsretraktion:
Setze $F : Y \times [0,1] \rightarrow Y, (y, s) \mapsto F_s(y) := (1-s) \cdot y + s \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{y}{\|y\|}$. Dann ist $F$ wohldefiniert und stetig. (Das sieht man genauso wie bei der Homotopieäquivalenz in Aufgabe 8.2.) Weiter gilt $F_0 = \mathrm{id}_Y$ und $F_1(y) = \frac{3}{4} \cdot \frac{y}{\|y\|}$. $F_1$ ist damit eine Retraktion von $Y$ auf die Menge der Vektoren der Länge $\frac{3}{4}$ in $\mathbb{R}^3$.
Ist $y \in Y$ mit $\|y\| = \frac{3}{4}$, so gilt für alle $s \in [0,1]$:

$$F_s(y) = (1-s) \cdot y + s \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{y}{\|y\|} = (1-s) \cdot y + s \cdot y = y$$

Damit ist $F$ eine Deformationsretraktion von $Y$ auf den Teilraum der Vektoren der Länge $\frac{3}{4}$, welcher kanonisch homöomorph zu $S^2$ ist. (Der Homöomorphismus ist gegeben durch Umskalierung.)
Nach Aufgabe 8.1 b) gilt:

$$\pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = \frac{3}{4}\}, y_0) \cong \pi_1(S^2, \frac{y_0}{\|y_0\|})$$

für $y_0 \in Y$ mit $\|y_0\| = \frac{3}{4}$. Nach einem Korollar zu Satz 16 in Kapitel 5 der Vorlesung gilt $\pi_1(S^2, \frac{y_0}{\|y_0\|}) = \{1\}$. Damit ist $\pi_1(Y, y_0)$ trivial und somit auch $\pi_1(U \setminus V, x_0)$.
Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\cong \varinjlim(\pi_1(U, x_0) \leftarrow \pi_1(U \setminus V, x_0) \rightarrow \pi_1(X \setminus V, x_0)) \\ &\cong \varinjlim(\{1\} \leftarrow \{1\} \rightarrow \pi_1(X \setminus V, x_0)) \\ &\cong \pi_1(X \setminus V, x_0) \end{aligned}$$