1. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie “
Musterlösung

Aufgabe 1.1
Sei G eine Gruppe. Zeige: G ist genau dann abelsch, wenn die Abbildung $i : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lösung: „$\Rightarrow$“ Sei G abelsch. Dann gilt für alle $g, h \in G$:

$$i(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} \underset{G \text{ abelsch}}{=} g^{-1}h^{-1} = i(g)i(h)$$

Somit ist i ein Gruppenhomomorphismus.
„$\Leftarrow$ “ Sei i ein Gruppenhomomorphismus und $g, h \in G$ beliebig. Dann gilt:

$$gh = (h^{-1}g^{-1})^{-1} = i(h^{-1}g^{-1}) \underset{i \text{ Homom.}}{=} i(h^{-1})i(g^{-1}) = (h^{-1})^{-1}(g^{-1})^{-1} = hg$$

Da $g, h \in G$ beliebig waren, ist G also abelsch.

Aufgabe 1.2

a) Seien G, H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass für alle $g \in G$ gilt: $\operatorname{ord}(\varphi(g)) \mid \operatorname{ord}(g)$

b) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \operatorname{Sym}(3)$ und $\psi : \operatorname{Sym}(3) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Lösung:

a) Sei $g \in G$ beliebig. Da für $\operatorname{ord}(g) = \infty$ nichts zu beweisen ist, nehmen wir an, dass g endliche Ordnung hat.
Wir setzen $n := \operatorname{ord}(g)$ und $k := \operatorname{ord}(\varphi(g))$. Da φ ein Homomorphismus ist, gilt:

$$\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e) = e$$

Nach Definition gilt somit $k \leq n$. Durch Teilen mit Rest können wir n schreiben als $n = s \cdot k + r$ mit $s, k \in \mathbb{N}, 0 \leq r < k$. Nun gilt aber:

$$\varphi(g)^r = \varphi(g)^{n-sk} = \varphi(g)^n \cdot (\varphi(g)^k)^{-s} = e \cdot e^{-s} = e$$

Wegen $r < k$ und der Minimalität von k muss schon $r = 0$ gelten und $k = \operatorname{ord}(\varphi(g))$ ist ein Teiler von $n = \operatorname{ord}(g)$.

b) Da die Nebenklasse $1 + 4\mathbb{Z}$ die Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ erzeugt, ist jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \operatorname{Sym}(3)$ eindeutig durch das Bild $\varphi(1 + 4\mathbb{Z})$ bestimmt. Nach 1.2 a) gilt zudem $\operatorname{ord}(\varphi(1 + 4\mathbb{Z})) \mid \operatorname{ord}(1 + 4\mathbb{Z}) = 4$. Diese Bedingung erfüllen die Elemente der Menge

$$X = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23)\}$$

(nicht aber die Dreizykel (123) und (132)). Man rechnet leicht nach, dass für jedes Element $x \in X$ die Abbildung φ_x, gegeben durch $\varphi_x(0 + 4\mathbb{Z}) = \varphi_x(2 + 4\mathbb{Z}) = \mathrm{id}$ und $\varphi_x(1 + 4\mathbb{Z}) = \varphi_x(3 + 4\mathbb{Z}) = x$, einen Gruppenhomomorphismus definiert.
Sei $\psi : \mathrm{Sym}(3) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphimus.
Es gilt $\mathrm{ord}((123)) = \mathrm{ord}((132)) = 3$. Da $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ kein Element der Ordnung 3 enthält, bildet ψ nach 1.2 a) die beiden Dreizykel auf das neutrale Element $0 + 4\mathbb{Z}$ ab. Da die Transpositionen $(12), (13)$ und (23) jeweils konjugiert zueinander sind und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ abelsch ist, gilt weiterhin

$$\psi((12)) = \psi((13)) = \psi((23)).$$

Nach 1.2 a) gilt zudem $\mathrm{ord}(\psi((12))) \mid \mathrm{ord}((12)) = 2$, also

$$\psi((12)) \in \{0 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}\}.$$

Nun gibt es neben dem trivialen Homomorphismus, welcher alle $\sigma \in \mathrm{Sym}(3)$ auf $0 + 4\mathbb{Z}$ abbildet, noch einen weiteren Homomorphismus $s : \mathrm{Sym}(3) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gegeben durch $s((12)) = s((13)) = s((23)) = 2 + 4\mathbb{Z}$.
Bemerkung: Der Homomorphismus s ist induziert durch die Signumsabbildung $\mathrm{sgn} : \mathrm{Sym}(3) \to \{1, -1\}$.

Aufgabe 1.3
Sei G eine Gruppe und seien A, B Untergruppen von G.
Weiter sei $A \cdot B$ gegeben durch $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

a) Beweise die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

   i) $A \cdot B$ ist eine Untergruppe von G.

   ii) $A \cdot B = B \cdot A$

b) Gebe ein Beispiel für eine Gruppe G und Untergruppen A, B von G an, sodass $A \cdot B$ keine Untergruppe von G ist.

Lösung:

a) „*ii) ⇒ i)*" Sei $A \cdot B = B \cdot A$.
neutrales Element: Da A, B Untergruppen von G sind, gilt für das neutrale Element $e \in A$ und $e \in B$ und somit $e = e \cdot e \in A \cdot B$.
Abgeschlossenheit: Seien $x, y \in A \cdot B$ beliebig, dann gibt es $a_x, a_y \in A$ und $b_x, b_y \in B$ mit $x = a_x b_x$ und $y = a_y b_y$. Wegen $b_x a_y \in B \cdot A = A \cdot B$ gibt es $\tilde{a} \in A, \tilde{b} \in B$ mit $b_x a_y = \tilde{a}\tilde{b}$. Weiter sind A, B als Untergruppen bzgl. der Gruppenverknüpfung abgeschlossen. Somit gilt:

$$xy = (a_x b_x)(a_y b_y) = a_x(b_x a_y)b_y = a_x(\tilde{a}\tilde{b})b_y = (a_x\tilde{a})(\tilde{b}b_y) \in A \cdot B$$

Inverse: Sei $x \in A \cdot B$ beliebig und seien $a \in A, b \in B$ mit $x = ab$. Da A, B Untergruppen sind, gilt $a^{-1} \in A$ und $b^{-1} \in B$. Damit erhält man:

$$x^{-1} = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in B \cdot A = A \cdot B$$

Folglich enthält $A \cdot B$ das neutrale Element und ist unter Multiplikation sowie Inversenbildung abgeschlossen, d.h. $A \cdot B$ ist eine Untergruppe in G.
„$i) \Rightarrow ii)$“ Sei $A \cdot B$ eine Untergruppe von G. Wir zeigen $A \cdot B = B \cdot A$ durch das Nachrechnen der beiden Mengeninklusionen.
$A \cdot B \supseteq B \cdot A$: Sei $x \in B \cdot A$ beliebig. Seien $b \in B, a \in A$ mit $x = ba$. Wegen $b = e \cdot b \in A \cdot B$ und $a = a \cdot e \in A \cdot B$ folgt $x \in A \cdot B$, da $A \cdot B$ unter Multiplikation abgeschlossen ist.
$A \cdot B \subseteq B \cdot A$: Sei $x \in A \cdot B$ beliebig. Da $A \cdot B$ eine Untergruppe ist, gilt $x^{-1} \in A \cdot B$. Also existieren $a \in A, b \in B$ mit $x^{-1} = ab$. Dann gilt:

$$x = (x^{-1})^{-1} = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in B \cdot A$$

Damit sind beide Inklusionen gezeigt und es gilt $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Betrachte die Gruppe $G = \mathrm{Sym}(3)$ und die Untergruppen $A = \{\mathrm{id}, (12)\}$ und $B = \{\mathrm{id}, (23)\}$. Dann gilt: $A \cdot B = \{\mathrm{id}, (12), (23), (123)\}$
$A \cdot B$ ist keine Untergruppe, da $(132) = (123)^{-1}$ nicht in $A \cdot B$ liegt. Alternativ kann man mit dem Satz von Lagrange argumentieren, dass $4 = \#(A \cdot B)$ kein Teiler der Gruppenordnung $\#\mathrm{Sym}(3) = 6$ ist.

Aufgabe 1.4
Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Der *Normalisator* von H in G ist definiert als $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$.
Zeige: $N_G(H)$ ist die (bzgl. Mengeninklusion) maximale Untergruppe von G, in welcher H ein Normalteiler ist. Insbesondere gilt also: H ist genau dann ein Normalteiler in G, wenn $N_G(H) = G$ gilt.

Lösung: Zuerst zeigen wir, dass $N_G(H)$ eine Untergruppe von G ist.
<u>neutrales Element</u>: Wegen $eHe^{-1} = eHe = H$ gilt offensichtlich $e \in N_G(H)$.
<u>Abgeschlossenheit</u>: Seien $g_1, g_2 \in N_G(H)$. Dann gilt:

$$(g_1g_2)H(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2Hg_2^{-1}g_1^{-1} = g_1(g_2Hg_2^{-1})g_1^{-1} = g_1Hg_1^{-1} = H$$

Nach Definition ist also $g_1g_2 \in N_G(H)$.
<u>Inverse</u>: Sei $g \in N_G(H)$. Dann gilt für g^{-1}:

$$g^{-1}H(g^{-1})^{-1} = g^{-1}Hg = g^{-1}gHg^{-1}g = H$$

Nach Definition ist damit $g^{-1} \in N_G(H)$.
Folglich ist $N_G(H)$ eine Untergruppe von G.
Da H als Untergruppe abgeschlossen unter Multiplikation und Inversenbildung ist, gilt $hHh^{-1} = H$ für alle $h \in H$, d.h. $H \leq N_G(H)$. Nach Definition von $N_G(H)$ ist H ein Normalteiler in $N_G(H)$.
Es bleibt noch die Maximalitätsaussage nachzuweisen. Sei dafür $M \leq G$ eine beliebige Untergruppe mit $H \trianglelefteq M$. Sei $m \in M$ beliebig. Da H ein Normalteiler in M ist, gilt $mHm^{-1} = H$ und somit $m \in N_G(H)$. Da $m \in M$ beliebig war, gilt $M \leq N_G(H)$, was die Maximalität von $N_G(H)$ zeigt.

***-Aufgabe**
Sei $G \times X \to X$ eine Wirkung und seien G und X endlich. Zeigen Sie, dass gilt

$$\#(G\backslash X) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \#X^g,$$

wobei $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$ die Fixpunktmenge eines Elements $g \in G$ und $G\backslash X = \{G(x) \mid x \in X\}$ die Bahnenmenge ist.

Lösung: Zunächst zeigen wir die Hilfsgleichung $\sum_{x\in X} \#G_x = \sum_{g\in G} \#X^g$. Betrachte die Menge

$$\mathrm{Fix} = \{(g, x) \in G \times X \mid g(x) = x\}.$$

Nach Definition des Stabilisators G_x und der Fixpunktmenge X^g gilt:

$$g \in G_x \Leftrightarrow (g, x) \in \mathrm{Fix} \Leftrightarrow x \in X^g$$

Nun zählen wir die Menge Fix auf zwei verschiedene Weisen ab und erhalten:

$$\#\mathrm{Fix} = \#\{(g, x) \in G \times X \mid g(x) = x\} = \sum_{x\in X} \#\{g \in G \mid (g, x) \in \mathrm{Fix}\} = \sum_{x\in X} \#G_x$$
$$\#\mathrm{Fix} = \#\{(g, x) \in G \times X \mid g(x) = x\} = \sum_{g\in G} \#\{x \in X \mid (g, x) \in \mathrm{Fix}\} = \sum_{g\in G} \#X^g$$

Damit stimmen beide Seiten der Hilfsgleichung mit der Kardinalität #Fix überein und sind damit gleich.

Sei $S \subseteq X$ ein Schnitt, d.h. für alle $x \in X$ gibt es genau ein $s \in S \cap G(x)$. Mit anderen Worten ist S ein vollständiges Repräsentantensystem der Bahnen in X und es gilt somit $\#S = \#(G\backslash X)$.
Betrachte die Abbildung $\alpha : G \times S \to X, (g, s) \mapsto g(s)$. Da S jede Bahn schneidet, ist α surjektiv. Sei $x \in X$ und $s \in S$ mit $G(x) = G(s)$. Dann besteht $\alpha^{-1}(x)$ genau aus den Elementen (g, s') mit $s' = s$ und $g(s) = x$. Diese Menge steht in Bijektion zum Stabilisator G_x. (Wie man sich schnell überzeugt, ist eine Bijektion $\alpha^{-1}(x) \to G_x$ gegeben durch $(g, s) \mapsto gg_0^{-1}$ wobei $g_0 \in G$ ein festes Element mit $g_0(s) = x$ ist.)
Weiter ist die Menge $G \times S$ die disjunkte Vereinigung $\coprod_{x\in X} \alpha^{-1}(x)$.
Damit haben wir mit unserer Hilfsgleichung:

$$\#G\cdot\#(G\backslash X) = \#G\cdot\#S = \#(G\times S) = \sum_{x\in X} \#(\alpha^{-1}(x)) = \sum_{x\in X} \#G_x = \sum_{g\in G} \#X^g$$

Dividieren beider Seiten durch $\#G$ liefert die Behauptung.