2. Geometrische Realisierung

Jedem simplizialen Komplex $K = (E, S)$ wird ein topologischer Raum $|K|$, seine geometrische Realisierung, zugeordnet. Zunächst definieren wir die Menge $|K|$ und danach zwei Topologien auf dieser Menge.

Sei $|K|$ die Menge aller Funktionen $\alpha : E \to [0,1]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\{e \in E \mid \alpha(e) > 0\}$ ist ein Simplex von K.
(2) $\sum_{e \in E} \alpha(e) = 1$.

Auf $|K|$ definieren wir eine Metrik d durch

$$d(\alpha, \beta) = \Big(\sum_{e \in E} (\alpha(e) - \beta(e))^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir bezeichnen $|K|$ zusammen mit dieser *metrischen Topologie* durch $|K|_d$. Jede Ecke $e \in E$ liefert eine stetige Abbildung

$$|K|_d \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \alpha(e).$$

Die Zahlen $(\alpha(e) \mid e \in E)$ heißen die *baryzentrischen Koordinaten* von α.

Die metrische Topologie ist oft ungeeignet, wenn K nicht lokal endlich ist. Wir definieren eine weitere Topologie auf $|K|$. Für $s \in S$ sei $|s| \subset |K|$ durch

$$|s| = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(e) \neq 0 \Rightarrow e \in s\}$$

definiert und *abgeschlossenes Simplex* von $|K|$ genannt. Wenn wir die Elemente von s als Basis eines Vektorraumes $\mathbb{R}(s)$ über $\mathbb{R}$ verwenden, so ist der Teilraum $|s| =: |s|_d$ von $|K|_d$ zu der kompakten Teilmenge

$$\Big\{\sum_{e \in s} x_e e \mid \sum x_e = 1,\ 0 \le x_e \le 1\Big\} \subset \mathbb{R}(s)$$

homöomorph. Die Teilraumtopologien von $|s_1|_d \cap |s_2|_d$ in $|s_1|_d$ und in $|s_2|_d$ stimmen überein und sind gleich derjenigen von $|s_1 \cap s_2|_d$, sofern $s_1 \cap s_2 \neq \emptyset$ ist. Wir erklären die *Komplextopologie* auf $|K|$ dadurch, daß eine Menge $A \subset |K|$ genau dann abgeschlossen sein soll, wenn für alle $s \in S$ der Schnitt $A \cap |s|_d$ in $|s|_d$ abgeschlossen ist. Die Teilraumtopologie von $|s|$ in der Komplextopologie ist weiterhin $|s|_d$. Wir nennen $|K|$ mit der Komplextopologie die *geometrische Realisierung* von K und verwenden für diesen topologischen Raum ebenfalls das Symbol $|K|$. Aus der Definition der geometrischen Realisierung ergeben sich unmittelbar die beiden folgenden Aussagen.

(2.1) Satz. *Die kanonische Abbildung $\coprod_{s \in S} |s| \to |K|$, die auf jedem $|s|$ die Inklusion ist, wird bezüglich der Komplextopologie eine Identifizierung.* ☐

(2.2) Satz. *Eine Abbi*
genau dann stetig, wenn
stetig ist.

Nach (2.2) ist die Ide
In der Elementargeo
Hülle von $q+1$ affin una
che Sinn der geometrisch
lang gemeinsamer Seiten
welche Seiten als „gem
wenn wir über Polyeder
Sei L ein Unterkompl
menge von $|K|$ identifi
denn um eine Teilmenge
nur mit Simplexen $|s|$
$|L| \subset |K|_d$ liefert den Ra
Ist $(L_j \mid j \in J)$ eine F
Vereinigung $\bigcup L_j$ und de
die Relationen $\bigcup |L_j| =$
Für jedes Simplex s
Teilraum

$$\langle s \rangle =$$

definiert. Das Komplem
$|s|$; er ist die geometris
echten Seiten von s beste
$\langle s \rangle, s \in S$. Im allgemein
immer offen in $|s|$.
Ein Homöomorphism
X. Ein berühmtes Probl
tigkeit eine Triangulier
der Flächen wurde von
1951 von Moise (siehe
Glatte Mannigfaltigkeit
gar so gewählt werden
ist (J.H.C. WHITEHEAD
Wir untersuchen jetz
rung. Sei weiterhin $K =$

(2.3) Satz. *Ist $A \subset |K|$*

Beweis. Sei $B \subset A$ eine
plex genau einen Punkt

(2.2) Satz. *Eine Abbildung $f : |K| \to Y$ in einen topologischen Raum Y ist genau dann stetig, wenn die Einschränkung auf jedes abgeschlossene Simplex stetig ist.* □

Nach (2.2) ist die Identität $|K| \to |K|_d$ immer stetig.

In der Elementargeometrie ist ein (geometrisches) q–Simplex die konvexe Hülle von $q+1$ affin unabhängigen Punkten. Die Aussage (2.1) ist der eigentliche Sinn der geometrischen Realisierung: Geometrische Simplexe werden entlang gemeinsamer Seiten verheftet. Die Datenstruktur $K = (E, S)$ kodifiziert, welche Seiten als „gemeinsam" anzusehen sind. Das wird noch deutlicher, wenn wir über Polyeder in euklidischen Räumen sprechen.

Sei L ein Unterkomplex von K. Wir können $|L|$ kanonisch mit einer Teilmenge von $|K|$ identifizieren, und $|L|$ trägt die Teilraumtopologie von $|K|$, denn um eine Teilmenge von $|L|$ als abgeschlossen zu erkennen, müssen wir nur mit Simplexen $|s|$ aus $|L|$ schneiden. Die Teilraumtopologie der Menge $|L| \subset |K|_d$ liefert den Raum $|L|_d$, und $|L|_d$ ist in $|K|_d$ abgeschlossen.

Ist $(L_j \mid j \in J)$ eine Familie von Unterkomplexen von K, so sind auch die Vereinigung $\bigcup L_j$ und der Durchschnitt $\bigcap L_j$ Unterkomplexe, und es gelten die Relationen $\bigcup |L_j| = |\bigcup L_j|$ und $\bigcap |L_j| = |\bigcap L_j|$.

Für jedes Simplex s von K wird das *offene Simplex* $\langle s \rangle \subset |K|$ als der Teilraum

$$\langle s \rangle = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(e) \neq 0 \Leftrightarrow e \in s\}$$

definiert. Das Komplement $|s| \setminus \langle s \rangle =: \partial |s|$ ist der *kombinatorische Rand* von $|s|$; er ist die geometrische Realisierung des Unterkomplexes, der aus allen echten Seiten von s besteht. Die Menge $|K|$ ist die disjunkte Vereinigung der $\langle s \rangle, s \in S$. Im allgemeinen ist $\langle s \rangle$ keine offene Menge in $|K|$, jedoch ist $\langle s \rangle$ immer offen in $|s|$.

Ein Homöomorphismus $t : |K| \to X$ heißt *Triangulierung* des Raumes X. Ein berühmtes Problem der Topologie ist die Frage, ob jede Mannigfaltigkeit eine Triangulierung besitzt (triangulierbar ist). Die Triangulierbarkeit der Flächen wurde von RADÓ [1924] gezeigt, die der 3–Mannigfaltigkeiten 1951 von Moise (siehe MOISE [1977] für Literatur und weitere Beweise). Glatte Mannigfaltigkeiten sind triangulierbar, die Triangulierung kann sogar so gewählt werden, daß sie auf jedem Simplex eine glatte Einbettung ist (J.H.C. WHITEHEAD [1940]; für Beweise auch MUNKRES [1966]).

Wir untersuchen jetzt genauer die Topologie der geometrischen Realisierung. Sei weiterhin $K = (E, S)$ ein simplizialer Komplex.

(2.3) Satz. *Ist $A \subset |K|$ kompakt, so trifft A nur endliche viele Simplexe.*

Beweis. Sei $B \subset A$ eine Menge, die aus jedem von A getroffenen offenen Simplex genau einen Punkt enthält. Ist $C \subset B$, so ist für jedes Simplex s die

Menge $C \cap |s|$ endlich, also abgeschlossen. Demnach ist jede Teilmenge von B abgeschlossen, also B ein diskreter Raum. Wäre B unendlich, so hätte B in der kompakten Menge A einen Häufungspunkt, was der Diskretheit widerspräche. □

Wir folgern, daß $|K|$ genau dann kompakt ist, wenn K endlich ist. Für endliches K ist die Identität $|K| \to |K|_d$ ein Homöomorphismus. Da $|K|_d$ als metrischer Raum separiert ist und die Identität $|K| \to |K|_d$ stetig, so ist auch $|K|$ immer separiert.

Für jede Ecke $e \in E$ heißt

$$\mathrm{St}(e) = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(e) \neq 0\}$$

der *Stern* von e. Da $\alpha \mapsto \alpha(e)$ stetig ist, so ist $\mathrm{St}(e)$ in $|K|_d$ und folglich in $|K|$ offen. Wenn wir e mit der Funktion $\alpha(e) = 1, \alpha(e') = 0$ für $e \neq e'$ identifizieren, so ist also $\mathrm{St}(e)$ eine offene Umgebung von e.

(2.4) Satz. *Sei K ein simplizialer Komplex. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) K ist lokal endlich.
(2) $|K|$ ist lokal kompakt.
(3) Die Identität $|K| \to |K|_d$ ist ein Homöomorphismus.
(4) $|K|$ ist metrisierbar.
(5) Jeder Punkt von K hat eine abzählbare Umgebungsbasis.

Beweis. (1) ⇒ (2). Sei $\alpha \in |K|_d$. Dann ist $\alpha \in \mathrm{St}(e)$ für eine Ecke $e \in K$. Da K lokal endlich ist, so ist e Ecke von nur endlich vielen Simplexen $s_j, j \in J$. Deshalb ist $\mathrm{St}(e)$ in der kompakten Menge $\bigcup_{j\in J} |s_j| = B$ enthalten. Es ist B die geometrische Realisierung eines endlichen Unterkomplexes L von K. Weil $\alpha \in \mathrm{St}(e) \subset |L|_d$ ist, liegt α im Inneren von $|L|_d$ und folglich auch im Inneren von $|L|$ bezüglich $|K|$. Demnach ist $|L|$ eine kompakte Umgebung von α.

(2) ⇒ (3). Wir zeigen, daß $|K| \to |K|_d$ eine offene Abbildung ist. Sei U offen in $|K|$ mit kompaktem Abschluß. Jede offene Menge in $|K|$ ist Vereinigung von solchen U, da $|K|$ lokal kompakt ist. Wir müssen zeigen, daß U in $|K|_d$ offen ist. Nach (2.3) gibt es einen endlichen Unterkomplex L von K, so daß $\overline{U} \subset |L|$. Sei K_1 der durch $K_1 = \{s \in K \mid |s| \cap U = \emptyset\}$ definierte Unterkomplex von K. Für $s \in K \setminus K_1$ ist dann $|s| \cap U$ eine nicht-leere offene Teilmenge von $|s|$. Also ist $\langle s \rangle \cap U \neq \emptyset$ und erst recht $\langle s \rangle \cap |L| \neq \emptyset$. Letzteres besagt aber, daß s im Unterkomplex L enthalten sein muß. Wir haben damit $K = K_1 \cup L$ gezeigt. Da L endlich ist, so ist $|L| \to |L|_d$ ein Homöomorphismus. Also ist U in $|L|_d$ offen; und da $|K_1|_d$ in $|K|$ abgeschlossen ist, so ist U auch in $|L|_d \setminus |K_1|_d$ offen. Wegen $|L|_d \setminus |K_1|_d = |K|_d \setminus |K_1|_d$ ist U in $|K|_d$ offen.

(3) ⇒ (4). Mit $|K|_d$ ist auch der homöomorphe Raum $|K|$ metrisierbar.

---

(4) ⇒ (5). In einem
Umgebungsbasis.
(5) ⇒ (1). Angenom
$e \in K$, die unendlich
bungsbasis $(U_j \mid j =$
schränkung $U_i \supset U_{i+1}$
Berührpunkt von $\langle s_i \rangle$.
Folge (α_i), weil $\alpha_j \in U_i$
diskret, da sie jedes

Eine geometrische
sogar simpliziale Räume
Dann wird die geometri
$K[n]$ definiert, wobei
$\tilde{\Delta}[m]$, $y \in K[n]$ identifi
Gabriel–Zisman [1967]
auch die Verwendung
[1968] demonstriert.
topologische Definition
Waldhausen [1985]
Sei $f : K_1 = (E_1, S_1)$
$\alpha : E_1 \to [0,1]$ aus $|K_1|$.

wird eine stückweise
Realisierung von f,
Funktor.

(2.5) Aufgaben und

1. Eine offene Teilmenge

2. Ein Morphismus
bildung ihrer geometri

3. Eine Triangulierung
flexible Verwendung
Unterteilungen ein
ist die baryzentrische.
ren einen neuen Komple
wobei $\{s_0, \ldots, s_a\} \in S'$
einen Homöomorphismus
punkte von $|UT(K)|$

(4) $\Rightarrow$ (5). In einem metrischen Raum haben alle Punkte eine abzählbare Umgebungsbasis.

(5) $\Rightarrow$ (1). Angenommen, K sei nicht lokal endlich. Wir wählen eine Ecke $e \in K$, die unendlich vielen Simplexen $s_1, s_2, \ldots$ angehört und eine Umgebungsbasis $(U_j \mid j = 1, 2, \ldots)$ von e. Wir können ohne wesentliche Einschränkung $U_i \supset U_{i+1}$ annehmen. Für jedes i ist $\langle s_i \rangle \cap U_i \neq \emptyset$, denn e ist Berührpunkt von $\langle s_i \rangle$. Sei $\alpha_i \in \langle s_i \rangle \cap U_i$ ausgewählt. Dann ist e Limes der Folge (α_i), weil $\alpha_j \in U_i$ für $j \geq i$. Andererseits ist die Menge $\{e, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ diskret, da sie jedes offene Simplex höchstens in einem Punkt trifft. □

Eine geometrische Realisierung läßt sich auch für simpliziale Mengen oder sogar simpliziale Räume definieren. Sei $K : \Delta \to \mathrm{TOP}$ ein simplizialer Raum. Dann wird die geometrische Realisierung als Quotientraum von $\coprod_{n \geq 0} \tilde{\Delta}[n] \times K[n]$ definiert, wobei jeweils $(\tilde{\Delta}(\alpha)x, y)$ mit $(x, K(\alpha)y)$ für $\alpha : [m] \to [n]$, $x \in \tilde{\Delta}[m]$, $y \in K[n]$ identifiziert wird. Für eine Analyse dieser Konstruktion siehe Gabriel–Zisman [1967], Lamotke [1968], Fritsch–Piccinini [1990]. Daß auch die Verwendung simplizialer Räume interessant ist, wird durch Segal [1968] demonstriert. Begriffsbildungen dieser Art sind besonders durch die topologische Definition der algebraischen K–Theorie von Quillen [1973] und Waldhausen [1985] wichtig geworden.

Sei $f : K_1 = (E_1, S_1) \to K_2 = (E_2, S_2)$ eine simpliziale Abbildung. Sei $\alpha : E_1 \to [0,1]$ aus $|K_1|$. Durch

$$|f|(\alpha) : E_2 \to [0,1], \quad e_2 \mapsto \sum_{f(e)=e_2} \alpha(e)$$

wird eine stückweise lineare Abbildung $|f| : |K_1| \to |K_2|$, die *geometrische Realisierung* von f, definiert. Damit wird die geometrische Realisierung ein Funktor.

(2.5) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Eine offene Teilmenge eines euklidischen Raumes ist triangulierbar.

2. Ein Morphismus zwischen simplizialen Räumen induziert eine stetige Abbildung ihrer geometrischen Realisierungen.

3. Eine Triangulierung eines Raumes ist eine sehr starre Struktur. Für die flexible Verwendung der simplizialen Komplexe in der Topologie sind deshalb Unterteilungen ein wichtiges Hilfsmittel. Eine formal definierbare Unterteilung ist die baryzentrische. Sei $K = (E, S)$ ein simplizialer Komplex. Wir definieren einen neuen Komplex, die *baryzentrische Unterteilung*, $UT(K) = (S, S')$, wobei $\{s_0, \ldots, s_a\} \in S'$ genau dann, wenn s_i echte Seite von s_{i+1} ist. Es gibt einen Homöomorphismus $|K| = |UT(K)|$. Geometrisch gesehen sind die Eckpunkte von $|UT(K)|$ die Schwerpunkte der Simplexe von $|K|$. Man überlege sich im einzelnen für ein 2–Simplex diese Unterteilung.

4. Ein Prisma $\tilde{\Delta}(q) \times I$ besitzt eine Triangulierung mit $q+1$ Simplexen der Dimension $q+1$. (Man bilde den Join der von $\{0,\ldots,i\} \times 0$ und $\{i,\ldots,q\} \times 1$ aufgespannten Seiten von $\tilde{\Delta}(q) \times 0$ und $\tilde{\Delta}(q) \times 1$.)

5. Die Funktionen $\alpha : |K| \to [0,1]$, $e \mapsto \alpha(e)$ bilden eine verallgemeinerte Partition der Eins. Nach VI(4.4) bilden die Mengen $\mathrm{St}(e)$, $e \in E$, eine numerierbare Überdeckung von $|K|$. Nach II(1.5) ist die Identität $|K| \to |K|_d$ immer eine Homotopieäquivalenz.

6. Sei $(\lambda_i : X \to [0,1] \mid j \in J)$ eine Partition der Eins auf dem Raum X. Wir definieren einen simplizialen Komplex $K = (J,S)$ durch $s \in S \Leftrightarrow \bigcap_{j \in s} \lambda_j^{-1}]0,1] \neq \emptyset$. Es gibt die kanonische Abbildung $\lambda : X \to |K|_d$, $\lambda(x) : j \mapsto \lambda_j(x)$. Wegen der lokalen Endlichkeit der Träger ist λ stetig. (Partitionen der Eins sind also im wesentlichen dasselbe wie Abbildungen in simpliziale Komplexe.)

3. Simpliziale Polyeder

Punkte $e_0,\ldots,e_k$ des $\mathbb{R}^n$ sind *affin unabhängig*, wenn aus den Relationen $\Sigma\lambda_i e_i = 0$ und $\Sigma\lambda_i = 0$ immer folgt, daß alle $\lambda_i = 0$ sind. Gleichbedeutend damit ist, daß die $e_0,\ldots,e_k$ nicht in einem $(k-1)$–dimensionalen affinen Unterraum liegen. Sind $e_0,\ldots,e_k$ affin unabhängig, so ist das von $e_0,\ldots,e_k$ *aufgespannte* k*–Simplex*

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \geq 0,\ \Sigma\lambda_i = 1 \right\}$$

die kleinste konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die alle e_i enthält. Diese Menge ist homöomorph zur geometrischen Realisierung des Komplexes, der aus allen nicht-leeren Teilmengen von $\{e_0,\ldots,e_k\}$ besteht.

Zu einem simplizialen Komplex $K = (E,S)$ und einer Familie $(x_e \mid e \in E)$ von Punkten des $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die stetige Abbildung

$$f : |K| \to \mathbb{R}^n, \quad \alpha \mapsto \sum \alpha(e) x_e. \tag{3.1}$$

Ist (3.1) eine Einbettung, so nennen wir das Bild von f ein *simpliziales Polyeder* im $\mathbb{R}^n$ *vom Schema* K. Ferner nennen wir das Polyeder $f(|K|)$ eine *Realisierung* von K *als Polyeder* im $\mathbb{R}^n$.

Der nächste Satz ist das Analogon des Whitneyschen Einbettungssatzes für Polyeder.

(3.2) Satz. *Sei K*
Dann hat K eine

Beweis. Wir wählen
mit den folgenden
(i) Jede Teilmenge
(ii) Zu jeder
disjunkt zur konvexen

Solche Mengen
Halbräumen mit
für $\{p_1,\ldots,p_{q-1}\}$
maximal $2n+2$
so gewählt, daß er
Weise erhält man

Sei $\{e_1, e_2, \ldots\}$
$\mathbb{R}^{2n+1}$ die durch
Simplex $|s| \subset |K|$
K höchstens n–dim
s und t injektiv;

Wir zeigen, daß
abgeschlossen. Dann
pakten C abgeschlossen

Da K lokal endlich
nes endlichen Unter
abgeschlossene Teilmenge
$f(A \cap f^{-1}(C))$ kompakt

(3.3) Aufgaben und

1. Sei X eine n–Man
eine Triangulierung
dimensionaler Komplex.

2. Nicht jeder 2–dimen
Eigenschaften hat eine
Komplex K heiße
(1) K ist abzählbar,
(2) Jedes Nullsimplex
(3) Jede Kante ist
Simplexen.