§5 Beispiele

1. Erinnerung: symmetrische Gruppen

Ist X eine (nicht leere) Menge, so ist $\mathrm{Sym}(X)$ die Gruppe aller Permutationen. Ist $X = \{1, \dots, n\}$ schreibe $\mathrm{Sym}(n) = \mathrm{Sym}(X)$.

Ist $\pi \in \mathrm{Sym}(X)$ eine Permutation der Form

$$x_1 \xmapsto{\pi} x_2 \xmapsto{\pi} x_3 \xmapsto{\pi} \dots \xmapsto{\pi} x_m \xmapsto{\pi} x_1,$$

wobei $x_j \neq x_k$ für $1 \leq j < k \leq m$ gilt und $\pi(y) = y$ für alle $y \neq x_1, \dots, x_m$, so heißt π ein <u>m-Zykel</u>.

Schreibe $\pi = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Ein 2-Zykel heißt auch <u>Transposition</u>. Offensichtlich ist jeder Zykel Produkt von Transpositionen, denn

$$(x_1, \dots, x_m) = (x_1, x_2) \circ (x_2, x_3) \circ \dots \circ (x_{m-1}, x_m)$$

Ist $\pi \in \mathrm{Sym}(X)$ beliebig und $\# X < \infty$, so ist π ein Produkt kommutierender Zykel.

Betrachte nämlich $H = \langle \pi \rangle \leq \mathrm{Sym}(X)$. Die Menge X zerfällt in Fixpunkte von H und Bahnen $\{x_1, \dots, x_m\}$ der Länge $m \geq 2$ (mit $m \mid \mathrm{ord}(g)$). Auf jeder solchen Bahn $B = \{x_1, \dots, x_m\}$ operiert π wie ein Zykel $\pi_B : x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \dots \mapsto x_m \mapsto x_1$ und das Produkt dieser Zykel operiert wie

π auf ganz X, $\pi = \pi_{B_1} \circ \pi_{B_2} \circ \cdots \circ \pi_{B_s}$.

<u>Lemma</u> Die Gruppe $\mathrm{Sym}(n+1)$ wird von den Transpositionen $s_j = (j, j+1)$, $1 \leq j \leq n$, erzeugt.

<u>Bew.</u> Wir haben gerade überlegt, dass $\mathrm{Sym}(n+1)$ von der Menge <u>aller</u> Transpositionen erzeugt wird. Nun gilt $(1,3) = (2,3)(1,2)(2,3)$ usw. $\square$

Beachte:
$$s_i s_j = s_j s_i \quad \text{für } |i-j| \geq 2$$
$$s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \quad \text{für } |i-j| = 1$$
$$s_i^2 = 1$$

d.h. $\mathrm{Sym}(n+1)$ erfüllt die Relationen der Coxetergruppe A_n $\quad \underset{1}{\circ} - \underset{2}{\circ} - \circ - \cdots - \underset{n}{\circ}$

(Aus der Übung wissen wir, dass $\mathrm{Sym}(n+1)$ eine Coxetergruppe vom Typ A_n ist, wir werden das später über Tits-Systeme nochmal sehen.)

2. Erinnerung: die allgemeine lineare Gruppe

Sei K ein Körper oder Schiefkörper (= Ring mit $K^* = K \setminus \{0\}$) und V ein K-Rechtsmodul (Vektoren links, Skalare rechts). Die Gruppe der K-linearen Automorphismen von V ist $GL(V)$, die (allgemeine) lineare Gruppe. Ist $\{b_1, \dots, b_n\} = \mathcal{B}$ eine Basis, so lassen sich die Elemente von $GL(V)$ mit $n \times n$-Matrizen identifizieren,

$$g \in GL(V) \longleftrightarrow g_{ij} \in GL_n(K)$$

$$g(b_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i \, g_{ij}$$

Die Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ operiert auf V durch

$$\pi(b_i) = b_j \iff \pi(i) = j .$$

Die entsprechenden Matrizen heißen <u>Permutationsmatrizen</u>; sie haben in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 als Eintrag, die anderen Einträge sind $= 0$.

Sei $T = T^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in K,\ a_1 \cdots a_n \neq 0 \right\}$

die Gruppe der (invertierbaren) <u>Diagonalmatrizen</u>, $T \cong K^* \times \dots \times K^*$. Das Produkt einer Diagonalmatrix $t \in T$ und einer Permutationsmatrix π nennt man <u>monomiale Matrix</u>, $n = t\pi$

Monomiale Matrizen haben in jeder Zeile und Spalte genau einen Eintrag $\neq 0$.

<u>Lemma</u> Die Gruppe N der monomialen Matrizen ist ein semidirektes Produkt aus $T \trianglelefteq N$ und $\mathrm{Sym}(n) \leq N$. Der Quotient $N/T =: W$ ist isomorph zu $\mathrm{Sym}(n)$.

<u>Beweis</u> Offensichtlich ist N eine Gruppe, die auf der Menge $\{b_1K, b_2K, \dots, b_nK\}$ operiert. Der Kern dieser Wirkung ist genau T, also $T \trianglelefteq N$, und $\mathrm{Sym}(n) \leq N$ operiert treu auf dieser Menge, also $N = T \cdot \mathrm{Sym}(n)$. $\square$

Für $i \neq j$ und $a \in K$ sei $x_{ij}(a)(b_k) = \begin{cases} b_k & k \neq i \\ b_i + b_j a & k = i \end{cases}$

$$X_{ij}(a) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & \boxed{a} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \\ \uparrow i \end{array}$$

Offensichtlich gilt $x_{ij}(a)x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b)$, insbesondere $x_{ij}(a)x_{ij}(-a) = 1$. Links- und Rechtsmultiplikation von Matrizen mit $x_{ij}(a)$ entsprechen elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen.

Satz (Gauß-Algorithmus)
Die Gruppe $GL_n K$ wird erzeugt von den Matrizen
$\{x_{ij}(a) \mid i \neq j,\ a \in K\} \cup T$

$\square$

Beweis → LA.

Wir betrachten jetzt die Untergruppen $B, U \leq GL_n(K)$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \middle| a_1 \cdots a_n \neq 0 \right\}$$ ist der Stabilisator

der Fahne $\{ b_1 K, b_1 K \oplus b_2 K, b_1 K \oplus b_2 K \oplus b_3 K, \dots \}$, vgl.
§1. Die Abbildung $B \to T$, $\begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$
ist ein Homomorphismus mit Kern U,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ und $B = TU$ ist

semidirektes Produkt.

Bem Die Gruppe U ist nilpotent und insbesondere auflösbar. Wenn K kommutativ ist, dann gilt $DB = U$ und B ist auflösbar. $\boxed{\text{Ü1}}$

Korollar Es gilt $GL_n(K) = \langle N \cup B \rangle$.

Beweis Wir wissen schon, dass gilt
$GL_n(K) = \langle N \cup \{x_{ij}(a) \mid i \neq j,\ a \in K\} \rangle$

Für $i<j$ ist $x_{ij}(a) \in B$. Für $i>j$ gibt es eine Permutationsmatrix $\pi \in Sym(n)$ mit

$$\pi^{-1} x_{ij}(a) \pi = x_{\pi(i),\pi(j)}(a) \quad \text{und} \quad \pi(i) < \pi(j)$$

$\rightsquigarrow$ $x_{ij}(a) \in \langle B \cup N \rangle$ für alle $i \neq j$. $\square$

3. Lemma Für $B = \{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in GL_2(K) \}$ und $A = \{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in GL_2(K) \}$

$$GL_2(K) = B \cup B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = BA \cup B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$$

Beweis Betrachte die 2-fach transitive Wirkung von $GL_2(K)$ auf der projektiven Geraden $KP^1 = \{ V \leq K^2 \mid \dim(V) = 1 \}$: Der Stabilisator von $b_1 K$ ist genau B und $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vertauscht $b_1 K$ und $b_2 K$. Nach dem Basisergänzungssatz operiert B transitiv auf $\{ V \in KP^1 \mid V \neq b_1 K \}$, also haben wir eine B-Doppelnebenklassenzerlegung $GL_2(K) = B \cup BsB$. Weiter gilt $A = sBs^{-1}$, also

$$BA \cup BsA = BsBs^{-1} \cup Bs^2Bs^{-1} = (BsB \cup B)s^{-1}$$
$$= GL_2(K) \qquad \square$$

4. <u>Theorem</u> Sei K ein Körper oder Schiefkörper. Für $n \geq 2$ ist das Datum $(GL_n(K), B, N, S)$ ein Tits-System vom Typ A_{n-1} $\begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & \cdots & \circ - \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & n-2 \;\; n-1 \end{array}$.

Dabei ist $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in GL_n(K) \right\}$, N die Gruppe der monomialen Matrizen und $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$

$s_j = (j, j+1)$ Transposition.

<u>Beweis</u> Nach §5.2 gilt $GL_2(K) = \langle B \cup N \rangle$ und $T = B \cap N \trianglelefteq N \Rightarrow$ (BN1) ist erfüllt. #

Weiter gilt $\mathrm{Sym}(n) = W = N/T$ mit EZS S aus Involutionen $\Rightarrow$ (BN 2) gilt.

Für $1 \leq j < n$ sei $G_j := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} * & * \\ * & * \end{smallmatrix}} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(K) \right\} \cong GL_2(K)$

Es gilt $s_j B s_j^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(K) \right\} \neq B$

also gilt (BN4).

Sei nun $s = s_j$ und $w \in W$. Wir müssen zeigen, dass gilt: $sBw \subseteq BwB \cup BswB$

Sei $A = wBw^{-1}$, dann ist zu zeigen:

$$sB \subseteq BA \cup BsA \qquad s = s_j$$

Betrachte $B_j = G_j \cap B$ $\quad A_j = G_j \cap A$.

Es gilt entweder $A_j = B_j = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots 1 & & & 0 \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}} & & \\ 0 & & & 1 \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$

oder $A_j = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots 1 & & & 0 \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}} & & \\ 0 & & & 1 \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Nach dem vorigen Lemma §5.2 gilt in jedem Fall

$$G_j = B_j A_j \cup B_j s_j A_j$$

Wegen $G_j B = B G_j = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots 1 & & & * \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} * & * \\ * & * \end{smallmatrix}} & & \\ 0 & & & 1 \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$ folgt

$$s_j B \subseteq G_j B = B G_j = B(B_j A_j \cup B_j s_j A_j)$$

$$\subseteq BA \cup B s_j A. \quad \text{Also gilt (BN3).}$$

Schliesslich gilt $s_j^2 = 1$ $\quad s_i s_j = s_j s_i$ für $|i-j| \geq 2$

$s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$ für $|i-j| = 1$ $\square$

Wir haben ein paar einfache Konsequenzen.

5. <u>Korollar</u> Der Fahnenkomplex $\Delta(K^n)$ aus §1 ist das zu Theorem §5.4 gehörige Gebäude. Die Appartements erhält man aus den Basen von K^n.

<u>Beweis</u> Betrachte die "Standardfahne"

$$c = (b_1 K \subseteq b_1 K \oplus b_2 K \subseteq \ldots \subseteq b_1 K \oplus \cdots \oplus b_{n-1} K)$$

Der $GL_n(K)$-Stabilisator von c ist offensichtlich genau B. Jede andere maximale Fahne erhält man aus c durch Anwenden einer Transformation $g \in GL_n(K)$ auf c. Also haben wir eine $GL_n(K)$-äquivariante Bijektion zwischen den Kammern von $\Delta(GL_nK, B, N, S)$ und den maximalen Fahnen in $\Delta(K^n)$. Die Standard-parabolischen Untergruppen P_R müssen (nach §4.15) mit den Stabilisatoren von Teilfahnen $a \leq c$ übereinstimmen. Damit erhalten wir einen typerhaltenden simplizialen Bijektion $\Delta(K^n) \simeq \Delta(GL_n(K), B, N, S)$.
Zur Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ gehört genau das Apartment, auf dem N operiert, also entsprechen Apartments Basen von K^n. $\square$

<u>Korollar</u> $Sym(n)$ ist eine Coxetergruppe mit dem EZS $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$. $\square$

<u>Korollar</u> Für jedes $g \in GL_n(K)$ gibt es Matrizen $u_1, u_2 \in U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\pi \in Sym(n)$ Permutationsmatrix und $t = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_n \end{pmatrix} \in GL_n(K)$ mit $g = u_1 t \pi u_2$.
Dabei ist π durch g eindeutig bestimmt.

Ist K ein Körper, so gilt

$$\det(g) = \mathrm{sign}(\pi)\, t_1 \cdots t_n$$

Ist K ein Schiefkörper setze $K_1(K) = (K^*)_{ab}$ und definiere

$$\det(g) = [\mathrm{sign}(\pi)\, t_1 \cdots t_n] \in K_1(K).$$

Dieudonné-Determinante von g. Man kann dann zeigen, dass $\det : GL_n(K) \to K_1(K)$ ein Homomorphismus ist und definiert $E_n(K) = \ker(\det)$.

6. __Satz__ Für $n \geq 2$ operiert die Gruppe $SL_n(K)$ (bzw im Schiefkörper-Fall $E_n(K)$) stark transitiv auf $\Delta(K^n)$, mit dem gleichen Apartmentsystem. Es gilt nämlich

$$GL_n(K) = SL_n(K) \cdot L$$

bzw $\quad GL_n(K) = E_n(K) \cdot L$

mit $\quad L = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a \in K^* \right\} \cong K^*$

(Im kommutativen Fall ist das ein semidirektes Produkt, weil $\det \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = a$)

Die Gruppe L operiert offensichtlich trivial auf dem Standardapartment Σ_0,

das der Basis $b_1, \dots, b_n$ entspricht $(L \leq T)$.
Ist also $g \in GL_n(K)$, $g \in h \cdot d$ mit $h \in \ker(\det)$ und $d \in L$, so bilden g und h Σ_0 auf das gleiche Apartment ab.
Achtung: L operiert trotzdem i.A. nicht trivial auf Δ!

7. <u>Hyperbolische Moduln</u> Sei K Körper oder Schiefkörper. Eine Abbildung $\sigma : K \to K$ heißt <u>Involution</u>, wenn gilt:

(i) $\sigma^2 = id_K$
(ii) $(x+y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$ für alle $x,y \in K$
(iii) $(xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma$ für alle $x,y \in K$

<u>Bsp</u>
- K kommutativ, $\sigma = id$
- K kommutativ, $\sigma \in Aut(K)$ Involution zum Beispiel $z \mapsto \bar{z}$ auf $K = \mathbb{C}$

Ist V ein (endlichdimensionaler) K-Rechtsmodul, dann ist der <u>Dual</u> $V^\vee = Hom_K(V,K)$ ein K-Linksmodul, mit

$$a\lambda = [v \mapsto a\lambda(v)]$$

Ist nun σ eine Involution, so wird $V^\vee$ ein Rechtsmodul mit $\lambda a := a^\sigma \lambda$. Diesen Rechtsmodul bezeichnen wir mit V^σ. #

Sei $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Auf $HV := V \oplus V^\sigma$ definieren wir eine <u>Sesquilinearform</u>

$$h : H \times H \to K \qquad \text{durch}$$

$$h(x \oplus \xi, y \oplus \eta) = \xi(y) + \eta(x)^\sigma \varepsilon$$

Es gilt $\quad h(u,v) = \varepsilon\, h(v,u)^\sigma$, man sagt, h ist <u>(ε,σ)-hermitesch</u>. Wichtige Spezialfälle

- $\sigma = id$, $\varepsilon = -1$, K kommutativ $\rightsquigarrow$ h <u>symplektisch</u>
- $\sigma = id$, $\varepsilon = 1$ K kommutativ $\rightsquigarrow$ h orthogonal

Für $V = K^n$ ist $HV = K^{2n}$ mit Gram-Matrix

$$\mathrm{Gram}(h) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(x \oplus \xi, y \oplus \eta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i^\sigma y_i + x_i^\sigma \eta_i \varepsilon \right)$$

Die zugehörige <u>unitäre Gruppe</u> ist

$$U(HV) = \{ g \in GL(HV) \mid h(gu, gv) = h(u,v) \text{ für alle } u,v \in HV \}$$

Für $X \subseteq HV$ sei $X^\perp = \{ v \in HV \mid h(x,v) = 0 \text{ für alle } x \in X \}$

Ein Unterraum $W \subseteq HV$ heißt <u>total isotrop</u>, wenn $W \subseteq W^\perp$ ($\Leftrightarrow h = 0$ auf $W \times W$), ein Vektor $u \neq 0$ heißt <u>isotrop</u>, falls $h(u,u) = 0$

Wenn gilt $U = W^{\perp}$, so heißt W <u>Lagrange'scher</u> Unterraum.

8. <u>Lemma A</u> Die Abbildung $\begin{array}{l} HV \to (HV)^{\sigma} \\ v \mapsto h(v,-) \end{array}$

ist bijektiv

<u>Beweis</u> Wähle Basis $b_1, \dots, b_n$ von V und duale Basis $\beta_1, \dots, \beta_n$ von $V^{\vee}$. Die Abbildung bildet die HV-Basis $\{b_1 \oplus 0, \dots, b_n \oplus 0, 0 \oplus \beta_1, \dots, 0 \oplus \beta_n\}$ auf eine duale Basis in $(HV)^{\vee}$ ab (bis auf Vorzeichen). $\square$

<u>Lemma B</u> Für jeden Unterraum $W \subseteq HV$ gilt

$$\dim(HV) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$$

<u>Beweis</u> Betrachte

$$\begin{tikzcd} (HV)^{\vee} \arrow[r, "\text{surj}", "\text{Einschränkung}"'] & W^{\vee} \\ HV \arrow[u, "\text{Lemma A}", "\cong"'] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Der Kern ist genau $W^{\perp}$ $\leadsto$ $\dim(HV) = \underbrace{\dim(W^{\vee})}_{=\dim(W)} + \dim(W^{\perp})$ $\square$

<u>Lemma C</u> Für jeden total isotropen Unterraum $W \subseteq HV$ gilt $\dim(W) \leq \dim(V)$. $\square$

<u>Lemma D</u> Alle maximalen total isotropen Unterräume haben die gleiche Dimension.

<u>Beweis</u> Sei $X, Y \subseteq HV$ zwei maximale total isotrope Unterräume, sei $Z = X \cap Y$. Wähle Komplemente $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ mit $X = X' \oplus Z$, $Y = Y' \oplus Z$. Zeige, dass $\dim(X') = \dim(Y')$ gilt.

Angenommen, $\dim(Y') > \dim(X')$. Dann ist aus Dimensionsgründen $W = (X')^\perp \cap Y' \neq 0$ (nach Lemma B). Weiter gilt $W \subseteq W^\perp$ (weil $W \subseteq Y$) und $W \cap X = 0$ (weil $W \subseteq Y'$). Betrachte

$$X + W = X \oplus W = X' \oplus Z \oplus W$$

Für $x \in X'$, $z \in Z$, $w \in W$ gilt

$h(x,z) = h(x,w) = h(z,w) = 0 \Rightarrow X \oplus W \supsetneq X$ total isotrop ↯ □

<u>Lemma E</u> Jeder total isotrope Unterraum ist in einem Lagrangeschen Unterraum enthalten. □

Ein Paar $\{u, v\}$ isotroper Vektoren heißt <u>hyperbolisches Paar</u>, wenn $h(u,v) = 1$ gilt.

<u>Lemma F</u> Ist u isotrop und gilt $h(u,z) = 1$, so gibt es $a \in K$ so, dass $\{u, v = ua + z\}$ hyperbolisch ist.

Beweis $h(u, ua+z) = 1$

$$h(ua+z, ua+z) = \overbrace{h(z,u)}^{=\varepsilon} a + a^\sigma \overbrace{h(u,z)}^{=1} + h(z,z) \stackrel{!}{=} 0$$

Schritt $z = x \oplus \xi \in V \oplus V^\sigma \rightsquigarrow h(z,z) = \xi(x) + \xi(x)^\sigma \varepsilon$

also gibt es ein $a \in K$, das die Gleichung löst. $\square$

Lemma G Ist $W \leq HV$ total isotrop, so gibt es $\tilde{W} \leq HV$ total isotrop mit $HV = W^\perp \oplus \tilde{W}$.
Insbesondere gibt es zu jedem Lagrangeschen Unterraum $W \leq HV$ einen komplementären Lagrangeschen Unterraum $\tilde{W}$ mit $HV = W \oplus \tilde{W}$.

Beweis Sei $w_1, \dots, w_m$ Basis für W.
Wähle $v_1 \in \{w_2, \dots, w_m\}^\perp$ mit $h(v_1, w_1) = 1$
Nach Lemma F finden wir a_1 so, dass $\tilde{w}_1 = w_1 a + v_1$ mit w_1 hyperbol. Paar bildet $\rightsquigarrow \tilde{w}_1 \in \{w_2, \dots, w_m\}^\perp$
Wähle $v_2 \in \{w_1, w_3, \dots, w_m, \tilde{w}_1\}^\perp$ mit $h(v_2, w_2) = 1$
$\rightsquigarrow$ erhalte $\tilde{w}_2 \in \{w_1, w_3, \dots, w_m, \tilde{w}_1\}^\perp$ $(w_2, \tilde{w}_2)$ hyperbol.
usw. Am Ende haben wir $\langle \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m \rangle = \tilde{W}$ total isotrop und $\tilde{W} \cap W^\perp = 0$ wegen

$$h(w_j, \tilde{w}_j) = 1$$

$\square$

Man nennt dann $\tilde{W}$ ein Lagrangesches Komplement von W

9. Satz (Spezialfall des Satzes von Witt)

Sind $X, Y \subseteq HV$ Lagrangesche Unterräume mit jeweiligen Lagrange'schen Komplementen $\tilde{X}, \tilde{Y}$, also

$X \oplus \tilde{X} = Y \oplus \tilde{Y} = HV$

und ist $\alpha : X \xrightarrow{\cong} Y$ linearer Isomorphismus, so gibt es genau ein $g \in U(HV)$ mit

$$g(X) = Y \quad , \; g(\tilde{X}) = \tilde{Y} \quad \text{und} \quad g|X = \alpha .$$

Beweis Sei $x_1, \dots, x_n$ Basis von X, sei $y_i = \alpha(x_i)$

Es gibt eindeutige Basis $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ von $\tilde{X}$ mit

$h(\tilde{x}_i, x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ genauso $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n \in \tilde{Y}$.

Setze $g(x_i) = y_i$, $g(\tilde{x}_i) = \tilde{y}_i$ $\square$

Korollar Sind $X, Y \subseteq HV$ total isotrop und gilt $\dim(X) = \dim(Y)$, so gibt es $g \in U(HV)$ mit $g(X) = Y$. Insbesondere ist $U(HV)$ transitiv auf den Lagrangeschen Unterräumen. $\square$

10. Sei $b_1, \dots, b_n$ Basis von V mit dualer Basis $\beta_1, \dots, \beta_n$ von V^σ (d.h. $\beta_i(b_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$)

Dann ist $b_1 \oplus 0 \dots b_n \oplus 0, 0 \oplus \beta_1, \dots, 0 \oplus \beta_n$ eine Basis von HV und die Gram-Matrix von h ist

$$\mathrm{Gram}(h) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}\varepsilon \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} =: J$$

Wir setz. die Involution σ fort auf $k \times l$-Matrizen durch $(a_{ij})^\sigma := (a_{ji}^\sigma)$ $K^{k \times l} \xrightarrow{\sigma} K^{l \times k}$.

Die definierende Gleichung der unitären Gruppe $U(HV)$ ist dann in Matrixform

$$g^\sigma J g = J \iff g = J^{-1} g^{-\sigma} J$$

$$\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ J^2 = \varepsilon}}{\iff} g = \varepsilon J g^{-\sigma} J \Big)$$

Auf der Gruppe $GL(HV)$ ist die Abbildung

$$\Theta : g \longmapsto \varepsilon J^{-1} g^{-\sigma} J$$

ein involutorischer Automorphismus, denn

$g \mapsto g^{-\sigma}$ ist Automorphismus $((gh)^{-\sigma} = g^{-\sigma} h^{-\sigma})$

$g \mapsto J^{-1} g J$ ist Automorphismus

$\Theta^2(g) = g$. Die <u>Fixgruppe</u> von Θ ist genau $U(HV)$.

11. Def Wir setzen

$$\Delta(HV,h) = \{\ \{0 < W_1 < \ldots < W_q < HV\} \mid \text{alle } W_j \text{ total isotrop}\ \}$$

Nach §5.8 Lemma E ist $\Delta(HV,h)$ ein reiner Simplizialkomplex. Tatsächlich ist $\Delta(HV,h)$ ein Gebäude; um das zu zeigen, benutzt man wieder ein Tits-System. Die zugehörige Gruppe ist $G = U(HV)$. Sei $b_1,\ldots,b_n$ Basis von $V\oplus 0 \subseteq HV$. Dann erhalten wir eine Fahne in $\Delta(HV,h)$, deren Stabilisator folgendermaßen aussieht (in 2×2-Blockmatrizen

$$g = \begin{pmatrix} b & x \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad b,c,x \in K^{n\times n}$$

$$b = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in GL_n K$$

$$g \in U(HV) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & x \\ 0 & c \end{pmatrix}^{\sigma} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1\!\!1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & x \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1\!\!1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b^\sigma & 0 \\ x^\sigma & c^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon c \\ b & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^\sigma \varepsilon c \\ c^\sigma b & x^\sigma \varepsilon c + c^\sigma x \end{pmatrix}$$

① $c^\sigma b = 1 \Leftrightarrow c^\sigma = b^{-1} \Leftrightarrow c = b^{-\sigma} \rightsquigarrow b^\sigma \varepsilon c = \varepsilon$

② $\varepsilon x^\sigma b^{-\sigma} + b^{-1} x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon(b^{-1}x)^\sigma + b^{-1}x = 0$

Das ist genau die Fixgruppe

$$\tilde{B}^\Theta = \{ g \in \tilde{B} \subseteq GL(HV) \mid g^\Theta = g \}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}} & * \\ 0 & \boxed{\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}} \end{pmatrix} \in GL(HV) \right\}$$

Vermutung: Das Tits-System ist

$$\big(U(HV) = GL(HV)^{\Theta},\ \tilde{B}^{\Theta},\ N^{\Theta},\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(geeignet)}}}{\tilde{S}} \big)$$

Um das zu motivieren: betrachte die Involution $\perp$ auf $\Delta(HV)$, $W \mapsto W^{\perp}$. Wir wollen $\Delta(HV,h)$ als Fixpunktmenge dieser Involution verstehen.

<u>Problem</u>: $W \subseteq HV$ totalisotrop $\Leftrightarrow W \subseteq W^{\perp}$, aber i.A. $W \neq W^{\perp}$ (ausser, wenn W Lagrange'sch ist).

<u>Lösung</u>: Betrachte statt W das <u>Baryzentrum</u> von $\{W, W^{\perp}\}$ im Simplizialkomplex bzw seiner Realisierung, $W \mapsto \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W^{\perp} \in |\Delta(HV)|$.

Damit $|\Delta(HV,h)| \hookrightarrow |\Delta(HV)|$ als <u>Fixpunktmenge</u> der Wirkung von $\perp$ auf $|\Delta(HV)|$.

Mit dieser Beobachtung und und §5.8 Lemma G sowie §5.9 kann man nun zeigen:

$\Delta(HV,h)$ ist ein Gebäude und

$U(HV)$ operiert stark transitiv.

Die Apartments sehen wie folgt aus: Ist $\Sigma \subseteq \Delta(HV)$ ein $\perp$-invariantes Apartment, so ist die $\perp$-Fixpunktmenge in $|\Sigma|$ ein Apartment in $\Delta(HV,h)$.

Allgemeiner kann man zu hermitischen und quadratischen Formen, die total isotrope Unterräume haben, Gebäude konstruieren, vgl. D. Taylor, The geometry of the classical groups. #

Wir geben noch zwei allgemeine Sätze / Beispielklassen an.

12. Def Eine Untergruppe $G \leq GL_n\mathbb{C}$ heißt algebraisch, wenn sie durch endlich viele Polynome definiert wird,

z.B.
$$SL_n\mathbb{C} = \{ g \in GL_n\mathbb{C} \mid \det(g) = 1 \}$$
$$SO_n\mathbb{C} = \{ g \in SL_n\mathbb{C} \mid g^T g = 1 \}$$
$$Sp_{2n}\mathbb{C} = \{ g \in GL_{2n}\mathbb{C} \mid g^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$$

Man nennt G einfach (als alg. Gruppe), wenn G keine algebraischen Normalteiler positiver Dimension hat. Die Gruppen oben sind einfach in diesem Sinne (bei $SO_n\mathbb{C}$ muss man $n \neq 2,4$ verlangen). Ist $G \leq GL_n\mathbb{C}$ einf. alg. Gruppe, so heißt $\underbrace{B}_{\text{eine alg. Gruppe}} \leq G$ Borelgruppe, wenn B zusammenhängend, auflösbar und maximal mit dieser Eigenschaft ist. Eine Untergruppe $T \leq B$ heißt Torus, wenn $T \cong (\mathbb{C}^*)^k$ ist, für $k \geq 1$.

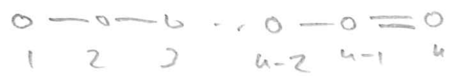
Satz (Tits) Ist G einf. alg. Gruppe, $B \leq G$ Borelgruppe, $T \leq B$ maximaler Torus, $N = Nor_G(T)$, so gibt es $S \subseteq G$ (kanonisch) so, dass (G, B, N, S) ein Tits-System ist.

Eine Untergruppe $P \leq G$ ist genau dann parabolisch, wenn G/P eine vollständige (= kompakte) Varietät ist.

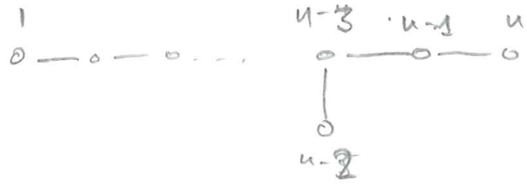
Das alles gilt über beliebig alg. abg. Körpern, wenn man die Zariski-Topologie benutzt.
Man erhält so zu jeder irreduziblen endlichen Coxetergruppe $\neq H_3, H_4$ (vgl § 3.6) Titssysteme:

$SL_{n+1}\mathbb{C} \rightsquigarrow A_n$  $n \geq 1$

$SO_{2n+1}\mathbb{C} \rightsquigarrow C_n$  $n \geq 1$

$Sp_{2n}\mathbb{C} \rightsquigarrow C_n$  $n \geq 1$

$SO_{2n}\mathbb{C} \rightsquigarrow D_n$  $n \geq 3$

E_n  $n = 6,7,8$

F_4 

G_2 

In der Strukturtheorie einfacher alg. Gruppen spielen die Tits-Systeme eine wichtige Rolle; vgl <u>Borel, Linear algebraic groups</u>.

13. Das gilt auch über beliebigen Körpern. Eine alg. Gruppe über einem Körper $\mathbb{F}$ ist dann ein Funktor

$$\underline{G} : \mathbb{F}\text{-Alg} \longrightarrow \text{Grp}$$

kommutative $\mathbb{F}$-Algebren ... Gruppen

zB $\underline{SL_n} : R \longmapsto SL_n(R)$

Ist $\underline{G}$ absolut einfache alg. Gruppe ($\leadsto \underline{G}(\overline{\mathbb{F}})$ einfach)

$\underline{T} \leq \underline{G}$ max. zerfallender Torus ($\underline{T}(R) \cong (R^*)^k$) mit Normalisator $\underline{N}$, $\underline{P} \leq \underline{G}$ minimale $\mathbb{F}$-parabolische Untergruppe ($\underline{P}(\overline{\mathbb{F}}) \leq \underline{G}(\overline{\mathbb{F}})$ parabolisch)

$\leadsto$ Tits-System $(\underline{G}(\mathbb{F}), \underline{P}(\mathbb{F}), \underline{N}(\mathbb{F}), S)$

$\to$ Borel, Linear algebraic groups

$\to$ Tits, Buildings of spherical type and finite BN-pairs, ch. 5

Ein Gebäude Δ, dessen Coxetergruppe endlich ist, heißt *sphärisch*. In einer sphärischen (= endlichen) Coxetergruppe (W, S) gibt es ein eindeutiges *längstes Element* $w_0 \in W$, d.h. $\ell_S(w) \leq \ell_S(w_0)$ für alle $w \in W$. Zwei Kammern $c, \check{c} \in \Delta$ heißen *gegenüberliegend*, wenn $\delta(c, \check{c}) = w_0$ gilt (vgl. §3.10)

14. Tits Fortsetzungssatz

Def Ist c eine Kammer im Gebäude Δ und $a_1, \dots, a_q$ die Menge der Seiten mit Kodimension k, so setze $\mathcal{E}_k(c) = \bigcup_{i=1}^{q} \mathrm{lk}(a_i)$

$\mathcal{E}_0(c) = \{c\}$

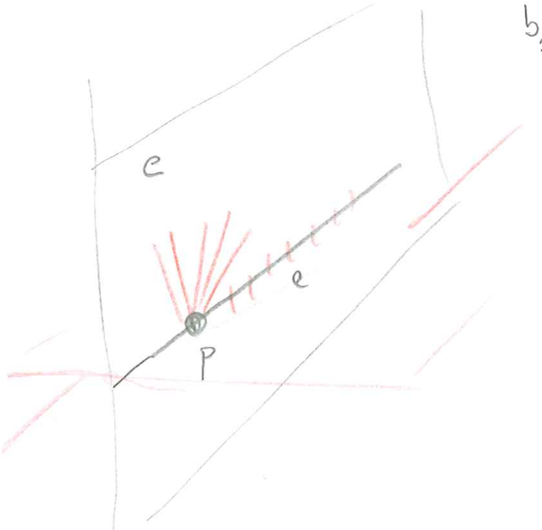
$\mathcal{E}_1(c) \cong$ Menge aller Kammern, die Seite der Kodim ≥ 1 mit c gemeinsam haben

Satz Seien Δ, Δ' zwei sphärische Gebäude von gleichem Typ mit Apartments $\Sigma \subseteq \Delta$, $\Sigma' \subseteq \Delta'$ und seien $c \in \Sigma$ sowie $c' \in \Sigma'$ Kammern. Sei $\varphi: \mathcal{E}_1(c) \cup \Sigma \to \mathcal{E}_1(c') \cup \Sigma'$ typerhaltende simpliziale Bijektion. Dann gibt es höchstens einen Isomorphismus $\tilde{\varphi}: \Delta \to \Delta'$, der φ fortsetzt.

Bsp $\Delta = \Delta' = \Delta(K^4)$

c Standardfahne: Punkt – Gerade – Ebene

$\underset{p}{b_1 K}$ $\quad$ $\underset{l}{b_1 K \oplus b_2 K}$ $\quad$ $\underset{e}{b_1 K \oplus b_2 K \oplus b_3 K}$



$\mathcal{E}_1(c)$ entspricht:

- Punkte auf l
- Geraden in e durch l
- Ebenen durch l

Fixiert man also $\mathcal{E}_1(c)$, so ist man in der Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathrm{Cen}(K) \right\}$$

Fixiert man nun noch eine Basis (bis auf Skalare), so ist man in der Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda^3 \neq 0 \,,\, \lambda \in \mathrm{Cen}(K) \right\}$$

die trivial auf $\Delta(K^3)$ operiert. #

<u>Theorem</u> (Tits) Seien Δ, Δ' zwei sphärische Gebäude (vom gleichen Typ) mit Apartments $\Sigma \subseteq \Delta$, $\Sigma' \subseteq \Delta'$ sowie Kammern $c \in \Sigma$, $c' \in \Sigma'$. Sei

$$\varphi : \mathcal{E}_2(c) \cup \Sigma \longrightarrow \mathcal{E}_2(c') \cup \Sigma'$$

ein Isomorphismus. Dann hat φ genau eine Fortsetzung zu einem Isomorphismus $\tilde{\varphi} : \Delta \to \Delta'$.

(Tits, Buildings of spherical type and finite BN-pairs
Ch 4 + Anhang

Scharlau, Buildings Ch7 in: Handbook of Incidence Geometry

Weiss, The structure of spherical buildings.

Korollar: Ist Δ sphär. Gebäude, $c \in \Delta$ Kammer, $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \Delta$ Apartments mit $c \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ und $\mathcal{E}_2(c) \cap \Sigma_1 = \mathcal{E}_2(c) \cap \Sigma_2$, so gibt es einen Automorphismus $\varphi : \Delta \to \Delta$, der $\mathcal{E}_2(c)$ fest lässt und Σ_1 auf Σ_2 abbildet. $\rightsquigarrow$ Existenz eines Tits-Systems!

15. Theorem (Tits-Weiss)

Die dicken irreduziblen sphärischen Gebäude vom Rang ≥ 3 werden durch folgende algebraische Daten klassifiziert:

A_n: $n \geq 3$

Körper und Schiefkörper $K \rightsquigarrow \Delta \cong \Delta(K^{n+1})$

D_n, $n \geq 4$

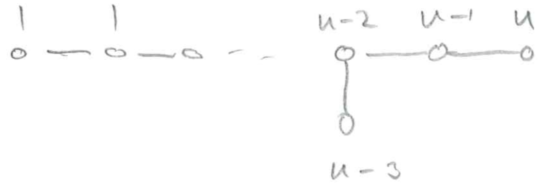
Körper $K \rightsquigarrow$ hyperbol. Modul $H(K^n)$

$\sigma = id$, $\varepsilon = 1$ $\qquad \Delta \cong \Delta(HK^n, h)$

Verwende als Ecken nur $W \subseteq HK^n$ total isotrop mit $\dim W \neq n-1$. Es gibt 2 Bahnen von Lagrange'schen in $SO(HK^n)$ $\rightsquigarrow$ 2 Typen von Lagrange'schen.

Typ E_n

$n = 6, 7, 8$



zu jedem Körper K genau eines.

Typ F_4, C_3

Cayleyalgebren, Schiefkörper, Körper, pseudoquadrat. Formen, symplektische Formen

Typ C_n, $n \geq 4$

Symplektische Formen, pseudo quadratische Formen (insbesondere $\Delta(HV; h)$) und weitere in Charakteristik 2

16 Fazit Irreduzible sphärische (dicke) Gebäude vom Rang ≥ 3 sind (durch algebraische Daten) klassifiziert. Sie haben automatisch stark transitive Automorphismengruppen, deren Struktur "bekannt" ist (z.B. einfache alg. Gruppen)

$\rightarrow$ Anwendungen in der Geometrie und Gruppentheorie!

17. <u>Bem</u> Die irreduziblen Gebäude vom Rang 2 sind Bäume ohne Blätter (Diagramm $\circ\overset{\infty}{-}\circ$, vgl § 3.11) oder <u>Verallgemeinerte Polygone</u> (Diagramm $\circ\overset{m}{-}\circ$, $2 \leq m < \infty$), bipartite Graphen vom Radius m und Umfang $2m$. Diese Gebäude lassen sich <u>nicht</u> klassifizieren (es gibt "wilde" Konstruktionen). Deswegen gibt es hier aber interessante gruppentheoretische Fragen, sowohl im endlichen als auch im unendlichen Fall.

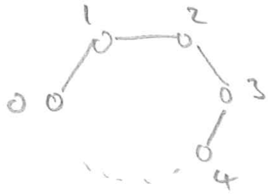
Wir betrachten jetzt <u>affine</u> oder <u>euklidische</u> Gebäude, insbesondere <u>Bruhat-Tits-Gebäude</u>.

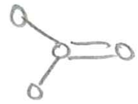
18. <u>Def</u> Sei (W_0, I_0) eine (irreduzible) sphärische Coxetergruppe. Die kanonische lineare Darstellung von W_0 auf $\mathbb{R}^m$ ($m = \# I$) ist injektiv und lässt ein positiv definites inneres Produkt $\langle , \rangle$ auf $\mathbb{R}^m$ invariant. Wenn es einen freien $\mathbb{Z}$-Modul $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ gibt mit
- $\Lambda \cong \mathbb{Z}^m$
- $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\Lambda) = \mathbb{R}^m$

so ist $W = W_0 \ltimes \Lambda$ eine Coxetergruppe zu $I \cup \{i_0\}$ (mit einem weiteren Erzeuger i_0)

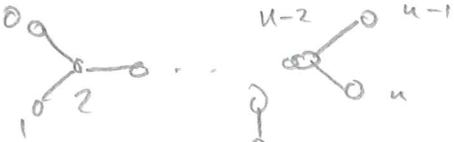
Solche Coxetergruppen nennt man <u>affine Coxetergruppen</u>.

Diese Gruppen sind bekannt:

$\tilde{A}_1$  $\tilde{A}_n$  $\tilde{A}_2$ 

$\tilde{B}_n$   $\tilde{B}_2$

$\tilde{C}_n$  $\tilde{C}_2$ 

$\tilde{D}_n$   $\tilde{D}_4$

$\tilde{E}_6$ 

$\tilde{E}_7$ 

$\tilde{E}_8$ 

$\tilde{F}_4$ 

$\tilde{G}_2$ 

Die geometrische Realisierung des Coxeterkomplexes ist dann eine Triangulierung des $\mathbb{R}^m$. Die zugehörigen Gebäude heißen <u>affine</u> oder <u>euklidische Gebäude</u>. Bsp: $\tilde{A}_1 \rightsquigarrow$ Baum.

Wir betrachten jetzt Gebäude vom Typ $\tilde{A}_n$.

19. <u>Def</u> Sei K ein Körper. Ein surjektiver Homomorphismus $\nu : (K^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$ heißt (nichttriviale) <u>diskrete Bewertung</u> auf K, wenn für alle $x, y \in K$ gilt

$$\nu(x+y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}.$$

Dabei setzt man $\nu(0) := \infty \geq n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Der zugehörige <u>Absolutbetrag</u> ist

$$|x| := \exp(-\nu(x)) \qquad \exp(-\infty) := 0$$

Dieser Absolutbetrag erfüllt die Dreiecksungleichung, sogar in der nicht-Archimedischen Form:

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

$$|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$$

[Damit wird K ein topologischer Körper.] #

<u>Beispiel</u> $K = \mathbb{Q}$, p Primzahl. Jedes $r \in \mathbb{Q}^*$ erlaubt (eindeutige) Darstellung

$$r = p^n \left(\frac{a}{b}\right) \qquad p \nmid a, \quad p \nmid b$$

Setze $\nu_p\left(p^n \frac{a}{b}\right) = n$

$\rightsquigarrow$ <u>p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$</u>

Ist ν eine nichttriviale diskrete Bewertung auf K, so ist $\mathcal{O} = \{x \in K \mid \nu(x) \geq 0\}$ ein Ring und
$\mathfrak{m} = \{x \in K \mid \nu(x) \geq 1\}$ ein Ideal in $\mathcal{O}$.
Weiter ist $\mathcal{O}^* = \{x \in K \mid \nu(x) = 0\}$, also $\mathcal{O} = \mathcal{O}^* \,\dot\cup\, \mathfrak{m}$
und $\mathcal{O}/\mathfrak{m} = k$ ist folglich ein Körper, der Residuenkörper.

Ein Element $\pi \in \mathcal{O}$ mit $\nu(\pi) = 1$ heißt uniformisierendes Element. Jedes $x \in K^*$ läßt sich eindeutig schreiben als

$$x = z\pi^l \quad \text{mit } z \in \mathcal{O}^* \text{ und } \nu(x) = l.$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring, alle Ideale in $\mathcal{O}$ sind von der Form $\pi^l\mathcal{O}$, $l \geq 1$, ($\mathfrak{m} = \pi\mathcal{O}$).

Bsp $(\mathbb{Q}, \nu_p) \leadsto \pi = p$, $\mathcal{O} = \{\frac{a}{b} \mid p \nmid b\}$

20. Def Sei (K, ν) wie oben und sei V ein K-Vektorraum. Dann ist V ein $\mathcal{O}$-Modul.

Lemma Eine Teilmenge $X \subseteq V$ ist genau dann K-linear abhängig, wenn sie $\mathcal{O}$-linear abhängig ist.

Bew: Angenommen, $x_1c_1 + \ldots + x_rc_r = 0$ $x_j \in V$, $c_j \in K$ und nicht alle $c_j = 0$. Sei $m = \min\{\nu(c_j) \mid j = 1 \ldots r\}$

$$\leadsto x_1 \underbrace{c_1\pi^{-m}}_{\in\mathcal{O}} + \ldots + x_r \underbrace{c_r\pi^{-m}}_{\in\mathcal{O}} = 0$$ □

Korollar Jeder endlich erzeugte $\mathcal{O}$-Modul $L \subseteq V$ ist frei, $L \cong b_1\mathcal{O} \oplus \ldots \oplus b_r\mathcal{O}$, $b_1, \ldots, b_r$ K-linear unabhängig. □

Wenn $L = v_1\mathcal{O} \oplus \dots \oplus v_n\mathcal{O}$ frei ist mit $n = \dim_K(V)$, so heißt L <u>$\mathcal{O}$-Gitter</u> in V. Zwei $\mathcal{O}$-Gitter (L, L') heißen <u>homothetisch</u>, wenn es $c \in K^*$ gibt mit $L' = Lc$. Die <u>Gitterklasse</u> von L ist

$[L] = \{ Lc \mid c \in K^* \} = \{ L\pi^\ell \mid \ell \in \mathbb{Z} \}$

21. <u>Def</u> Sei (K, ν) nichttrivial diskret bewerteter Körper, sei $V = K^n$ mit Basis $b_1, \dots, b_n$ und sei $\mathcal{L} = \{ [L] \mid L \ \mathcal{O}\text{-Gitter in } K^n \}$, für $n \geq 2$.
Zwei Gitterklassen $[L], [L']$ heißen <u>inzident</u>, wenn es $\alpha \in K^*$ gibt mit

$$L\pi \subseteq L'\alpha \subseteq L \quad \left[\Leftrightarrow L'\pi \subseteq L\tfrac{\pi}{\alpha} \subseteq L' \right]$$

Der Simplizialkomplex $\Delta(K^n, \nu)$ hat als Ecken die Gitterklassen, Simplizes sind endliche Mengen paarweise inzidenter Gitterklassen.

Ist L ein $\mathcal{O}$-Gitter mit Basis $v_1, \dots, v_n$, $g(b_j) = v_j$, so hängt die Zahl $\nu(\det(g))$ nur von L ab, da $\nu(\det(h))$ für alle $h \in GL_n\mathcal{O}$ $(\nu(\mathcal{O}^*) = \{1\})$. Ist $c \in K^*$, so hat Lc Basis $v_1c, \dots, v_nc \Rightarrow n \cdot \nu(c)$ wird zu $\nu(\det(g))$ addiert. Die Zahl

$$\nu(\det(g)) + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ hängt also}$$

nur von $[L]$ ab und heißt Typ des Gitters,

$$t([L]) = \nu(\det(g)) + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Um $\Delta(K^n, \nu)$ besser zu verstehen, brauchen wir den Elementarteilersatz

22. <u>Elementarteilersatz</u> Für jedes $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ gibt es $P, Q \in GL_n\mathcal{O}$ mit

$$PAQ = \begin{pmatrix} \pi^{l_1} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \pi^{l_s} & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad 0 \le l_1 \le l_2 \ldots \le l_s$$

<u>Beweis</u>: Jacobson, Basic Algebra I, Ch 3.7. $\square$

23. <u>Kor A</u> Sind L, L' Gitter mit $L \supseteq L'$, so gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ mit $L = v_1\mathcal{O} \oplus \ldots \oplus v_n\mathcal{O}$

$$L' = v_1\pi^{l_1}\mathcal{O} \oplus \ldots \oplus v_n\pi^{l_n}\mathcal{O}. \quad \square$$

<u>Kor B</u> Sind L, L' Gitter mit $L \supsetneq L' \supsetneq L\pi$, so gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ mit $L = v_1\mathcal{O} \oplus \ldots \oplus v_n\mathcal{O}$ und

$$L' = \underbrace{v_1\mathcal{O} \oplus \ldots \oplus v_s\mathcal{O}}_{} \oplus \underbrace{v_s\pi\mathcal{O} \oplus \ldots \oplus v_n\pi\mathcal{O}}_{} = L'_+ \oplus L'_-\pi \quad \square$$

<u>Kor C</u> Sind $[L_i]$ $i = 1,2,3$ paarweise inzident (und verschieden), so können die Repräsentanten L_i so gewählt werden, dass gilt $L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq L_1\pi$ oder $L_1 \supseteq L_3 \supseteq L_2 \supseteq L_1\pi$

<u>Beweis</u> Wähle L_2, L_3 so, dass gilt

$$L_1 \supseteq L_i \supseteq L_1\pi \quad , \text{ für } i = 2,3.$$

sowie $\quad L_2 \supseteq L_3\pi^m \supseteq L_2\pi$

Wende Kor C an ⇝

$$L_1 = L_{2+} \oplus L_{2-} = L_{3+} \oplus L_{3-}$$

$$L_2 = L_{2+} \oplus L_{2-}\pi \qquad L_3 = L_{3+} \oplus L_{3-}\pi$$

$$L_{2+} \oplus L_{2-}\pi \supseteq L_{3+}\pi^m \oplus L_{3-}\pi^{m+1} \supseteq L_{2+}\pi \oplus L_{2-}\pi^2$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ L_{2+} \oplus L_{2-}}}{L_1}\pi^m \supseteq L_{2+}\pi \oplus L_{2-}\pi^2 \quad \rightsquigarrow \quad m \leq 1$$

$m = 0$ $\quad L_{2+} \oplus L_{2-}\pi \supseteq L_{3+} \oplus L_{3-}\pi \quad \rightsquigarrow \quad L_2 \supseteq L_3$

$m = 1$ $\quad L_3\pi \supseteq L_2\pi \quad \rightsquigarrow \quad L_3 \supseteq L_2$ $\square$

<u>Kor D</u> Die Simplizes in $\Delta(K^n, \nu)$ sind von der Form $\{[L_0], \dots, [L_s]\}$ mit

$L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_s \supsetneq L_0\pi$. Alle maximalen Simplizes haben n Ecken, keine zwei Ecken in einem Simplex hat den gleichen Typ.

<u>Bew</u> Nach Kor C können wir die Repräsentanten L_i so wählen, dass $L_0 \supsetneq L_i \supsetneq L_0\pi$ gilt für $s \geq i \geq 1$. Für $i \neq j$ gilt dann $L_i \supseteq L_j$ oder $L_j \supseteq L_i$, d.h. wir haben eine lineare Anordnung (nach Umnummerieren),

$L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_s \supsetneq L_0\pi$.

Offensichtlich ist t auf den Simplex injektiv

$\dashv$

Im $k = \mathcal{O}/_{\mathcal{O}\pi}$ - Vektorraum $L_0/_{L_0\pi}$ kann man die Fahne verfeinern zu maximal Simplices hat n Ecken. □

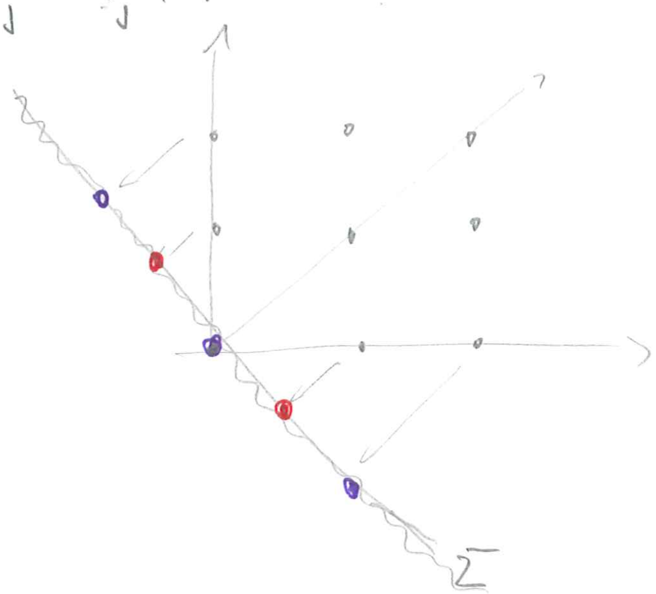
24. Zur Basis $b_1, \dots, b_n$ des K^n gehört folgendes Apartment: seine Ecken sind Gitterklassen von Gittern

$$L = L(l_1, \dots, l_n) = b_1 \pi^{l_1} \mathcal{O} \oplus \dots \oplus b_n \pi^{l_n} \mathcal{O}$$

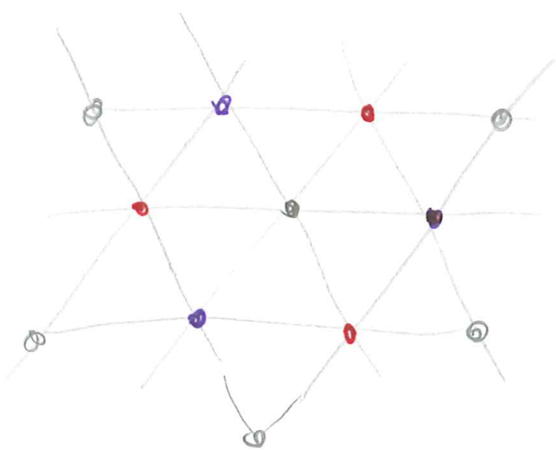
$$[L(l_1, \dots, l_n)] = [L(\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_n)] \iff$$

$$\tilde{l}_j = l_j + r \quad \text{für ein } r \in \mathbb{Z}$$

$n = 1$



$n = 2$



Ein Tits-System in $SL_n(K)$ lässt sich damit leicht angeben. Vergleiche Brown, Ch V 8.

Die affinen Gebäude der Dimension ≥ 3 lassen sich durch algebraische Daten klassifizieren, ähnlich wie die sphärischen Gebäude der Dimension ≥ 2. Man benutzt dazu, dass jedes affine Gebäude als "Rand im Unendlichen" ein sphärisches Gebäude hat $\to$ Weiss, The structure of affine buildings.

25. Ist Δ ein affines Gebäude, so kann man jedes Apartment $\Sigma \subseteq \Delta$ mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren, genauer: $|\Sigma| \cong \mathbb{R}^m$. Über das W_0-invariante innere Produkt erhält man eine W-invariante euklidische Metrik auf $|\Sigma| \cong \mathbb{R}^m$, die sich (nach (G2)) auf $|\Delta|$ fortsetzt. Mit Hilfe der Retraktion $\rho : \Delta \to \Sigma$ kann man zeigen, dass die Dreiecksungleichung gilt, d.h. man erhält eine Metrik auf $|\Delta|$. Mit dieser Metrik wird das affine Gebäude ein <u>CAT(0)-Raum</u>, Dreiecke sind "nicht dicker" als euklidische Vergleichsdreiecke. $\to$ Brown, Buildings VI. 3.

Für sphärische Gebäude kann man eine ähnliche Konstruktion machen, mit $|\Sigma| \cong \mathbb{S}^m$.

Dann wird $|\Delta|$ ein <u>CAT(1)-Raum,</u> Dreiecke sind nicht dicker als sphärische Dreiecke.

M. Davis hat gezeigt, dass man allgemein <u>jedem</u> Gebäude Δ kanonisch einen CAT(0)-Raum X_D zuordnen kann. Die Konstruktion ist aber komplizierter.

CAT(0)-Räume sind kontrahierbar, sehen also homotopietheoretisch wie Punkte aus. Das gilt insbesondere für affine Gebäude. Was kann man allgemein über den Homotopietyp der geometrischen Realisierung eines Gebäudes sagen?

26. <u>Lemma</u> Sei (W,I) ein Coxetersystem. Dann sind äquivalent:

(1) Es gibt ein $w_0 \in W$ so, dass für alle $i \in I$ gilt $\ell(w_0 i) < \ell(w_0)$

(2) W ist endlich (= sphärisch).

In dieser Situation ist w_0 eindeutig bestimmt.

<u>Bew</u> Bourbaki, Lie, Ch IV §1 Ex. 22 $\square$

27. Def Sei Δ ein Gebäude vom Typ (W,I).

Sei $c_0 \in \Delta$ eine Kammer. Für $k \geq 0$ sei

$$\Delta_k = \{ a \in \Delta \mid \text{es gibt eine Kammer } c \supseteq a \text{ mit } d(c_0,c) \leq k \}$$

Dabei ist $d(c_0,c) = \ell_I \, \delta(c_0,c)$ die Länge einer kürzesten Galerie von c_0 nach c.

Lemma Ist $\Delta_k \neq \Delta$, so ist $|\Delta_k|$ (in der schwachen Topologie) kontrahierbar.

Beweisidee Für $\Delta_0 = \{a \in \Delta \mid a \leq c\}$ ist das richtig.

Angenommen, $\Delta_{k+1} \neq \Delta$ und $\Delta_k \subseteq X \subseteq \Delta_{k+1}$, für einen reinen Unterkomplex $X \subseteq \Delta$.

Sei c eine Kammer, $c \in \Delta_{k+1}$ und $c \notin Y$.

Zeige: $\Delta_{\leq c} \cap Y = \Delta_{\leq c} \cap \Delta_k$ und mit

Lemma 26: $|\Delta_{\leq c}|$ erlaubt Retraktion auf $|\Delta_{\leq c} \cap \Delta_k|$

So lassen sich alle Kammern $c \in \Delta_{k+1}$, $c \notin \Delta_k$ gleichzeitig nach Δ_k retrahieren. $\square$

Theorem (Satz von Solomon-Tits)

Wenn W unendlich ist, so ist $|\Delta|$ kontrahierbar

Wenn W endlich ist, so hat $|\Delta|$ den Homotopietyp einer Summe von Sphären

Bew: (1) $\# W = \infty \Rightarrow \Delta_k \neq \Delta$ für alle k

$\rightsquigarrow |\Delta| = \bigcup_{k \geq 0} |\Delta_k|$ kontrahierbar als direkter Limes von kontrahierbaren Zellkomplexen.

(2) $\# W < \infty$, $m+1 = l_I(w_0)$ w_0 wie in Lemma 26

$$\underbrace{\Delta = \Delta_m}_{\text{kontrahierbar}} \cup \bigcup \{ \Delta_{\leq c} \mid \delta(c, c_0) = w_0 \}$$

$\Rightarrow |\Delta| \simeq |\Delta| / |\Delta_m| \simeq \bigvee_\alpha \mathbb{S}^k$ $k = \dim \Delta$

$\alpha = \# \{ c \mid \delta(c_0, c) = w_0 \}$

(Brown, Buildings, IV. 6)

Folgerung Δ sphärisches Gebäude, $\dim \Delta \geq 1$

$$H_k(|\Delta|) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ \bigoplus_\alpha \mathbb{Z} & k = \dim \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathrm{Aut}(\Delta)$ operiert auf $\bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$, den Steinbergmodul.