Vorlesung Gebäude

Münster SS 2012

4-stündig

Linus Kramer

Gebäude sind kombinatorische Strukturen (Simplizialkomplexe), die besonders in der Strukturtheorie von einfachen Gruppen eine Rolle spielen, genauer bei

- endlichen einfachen Gruppen
- einfachen algebraischen Gruppen
- einfachen Liegruppen
- Kac-Moodygruppen, Schleifengruppen ...

<u>Bsp</u> • Nach der <u>Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen</u> gilt

$$\{\text{endl. einf. Gruppen}\} = \{\text{alternierende Gruppe } \mathrm{Alt}(n), n \geq 5\}$$
$$\cup \ \underline{\{\text{einf. Gruppen vom Lie-Typ}\}}$$
$$\cup \ \{26 \text{ sporadische einf. Gruppen}\}$$

• $G = SL_n\mathbb{C} = \{g \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det(g) = 1\}$ operiert auf $\mathbb{C}^n$

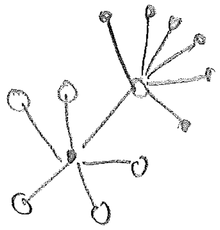
$P \leq G$ max. zush. nicht halbeinfache Untergruppe
$\iff P$ fixiert Teilraum $W \leq \mathbb{C}^n$, $P = G_W$

kodiert <u>projektive Geometrie</u> in $\mathbb{C}^n$

$V, W \leq \mathbb{C}^n$ Unterräume
$V \leq W$ oder $W \leq V \iff G_V \supseteq G_W$ oder $G_W \supseteq G_V$

- p Primzahl, $|\cdot|_p$ p-adische Norm auf $\mathbb{Q}$, $\left|\frac{a}{b}p^k\right| = 2^{-k}$, $ggT(a,p) = 1 = ggT(b,p)$

$\rightsquigarrow$ Bruhat-Tits-Baum zu $SL_2\mathbb{Q}$



$\rightsquigarrow$ Baum der Valenz $p+1$

$\rightsquigarrow$ euklidische / affine Bruhat-Tits-Gebäude

<u>Geplante Themen</u>:

- Coxetergruppen
- Gebäude
- Tits-Systeme (BN-Paare)
- Sphärische Gebäude
- euklidische Gebäude
- metrische Eigenschaften ...

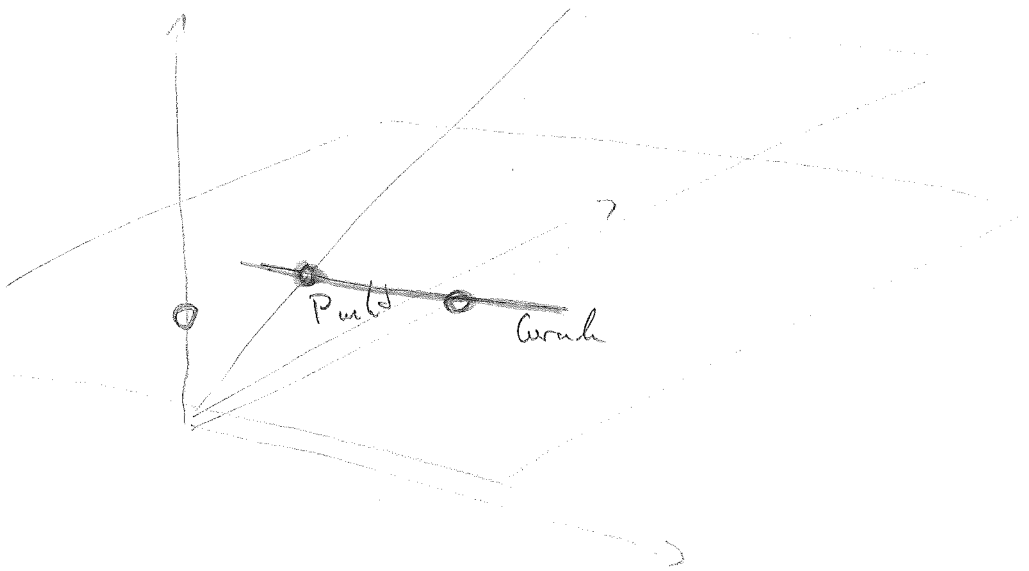
§1 Etwas projektive Geometrie

Im Folgenden sei K ein Körper oder Schiefkörper und V sei ein $(n+1)$-dimensionaler Rechtsvektorraum / Rechtsmodul über K.

Die <u>projektive Geometrie</u> zu V ist die durch "$\subseteq$" partiell geordnete Menge

$$PG(V) = \{ U \subseteq V \mid U \text{ Unterraum}, \ 0 \neq U \neq V \}$$

der echten nichttrivialen Unterräume. Einen 1-dim. Unterraum nennt man <u>Punkt</u>, einen 2-dim. Unterraum nennt man <u>Gerade</u>.



affine Hyperebene, die <u>nicht</u> durch den Nullpunkt geht

Eine *Fahne* ist eine aufsteigende Kette von Unterräumen

$$0 \neq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq \cdots \subsetneq U_k \subsetneq V$$

Die *Länge* der Fahne ist k. Offensichtlich ist n die maximale Länge einer Fahne und jede Fahne ist in einer Fahne der Länge n enthalten. (Basisergänzungssatz). Ist $\{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ eine Basis, so ist

$$\{U_j = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_j\} \mid 1 \leq j \leq n\}$$

eine (maximale) Fahne und jede maximale Fahne entsteht so.

1. *Def* Der *Fahnenkomplex* $\Delta(V)$ ist die Menge aller Fahnen $\{U_1 \subseteq \ldots \subseteq U_k\}$, mit der Inklusion "$\subseteq$" von Fahnen als partieller Ordnung. Dabei erlauben wir die *leere Fahne* $\{\}$. Die Gruppe $GL(V)$ operiert auf $PG(V)$ und auf $\Delta(V)$ durch

$$(g, U) \longmapsto g(U)$$

$$(g, \{U_1, \ldots, U_k\}) \longmapsto \{g(U_1), \ldots, g(U_k)\}$$

Diese Wirkung ist transitiv auf den maximalen Fahnen in $\Delta(V)$. (Basisergänzungssatz)

2. <u>Def</u> Sei X eine Menge und $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von endlichen Teilmengen von X. Wir nennen $(\Delta, \subseteq)$ einen <u>Simplizialkomplex</u>, wenn gilt:

$$\text{aus } a \subseteq b \in \Delta \text{ folgt stets } a \in \Delta$$

d.h. Δ ist <u>abgeschlossen unter Abstieg</u>. Allgemeiner nennen wir eine partiell geordnete Menge auch Simplizialkomplex, wenn sie zu so einem $(\Delta, \subseteq)$ ordnungs-isomorph ist. Die Elemente von Δ heißen <u>Simplizes</u>. Die <u>Dimension</u> eines Simplex $a \in \Delta$ ist k, falls $\# a = k+1$ gilt. Sei $\Delta^{(k)} = \{a \in \Delta \mid \dim a = k\}$

<u>Konstruktion</u> Ist $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, so ist ΔP: die Menge aller endlichen aufsteigenden Ketten in P, $\{x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\}$. Offensichtlich ist $(\Delta P, \subseteq)$ ein Simplizialkomplex, insbesondere ist

$$\Delta(V) = \Delta P(V)$$

ein $(n-1)$-dimensionaler Simplizialkomplex.

Ist $(\Delta, \subseteq)$ ein Simplizialkomplex, so nennt man den Simplizialkomplex

$$\Delta(\Delta \setminus \{\emptyset\}) = sd(\Delta)$$

die <u>baryzentrische Unterteilung</u> von Δ

<u>Beispiel</u> Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X (d.h. $\mathcal{U}$ ist Menge offener Mengen in X mit $\bigcup \mathcal{U} = X$), so ist der <u>Nerv von $\mathcal{U}$</u> der Simplizialkomplex

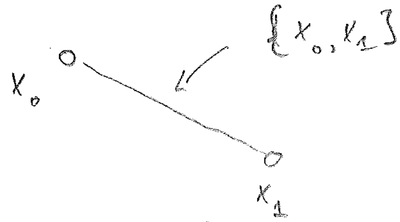
$$N(\mathcal{U}) = \{ \{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathcal{U} \mid U_1 \cap \ldots \cap U_k \neq \emptyset \}$$

Die <u>geometrische Realisierung</u> $|\Delta|$ eines Simplizialkomplex $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Funktionen

$\varphi : X \to [0,1]$ mit

(1) $\operatorname{supp}(\varphi) = \{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\} \in \Delta$

(2) $\sum_{x \in X} \varphi(x) = 1$



Die Zahlen $\varphi(x) \in [0,1]$ nennt man die <u>baryzentrischen Koordinaten</u> des Punktes $\varphi \in |\Delta|$.

Die geom. Realisierung $|\Delta|$ läßt sich auf mehrere Weisen zu einem topologischen Raum machen. Die <u>schwache Topologie</u> auf $|\Delta|$ ist wie folgt definiert. Ist $a \in \Delta$ ein Simplex, so setze für $\varphi, \psi \in |\Delta|$ mit $\mathrm{supp}(\varphi), \mathrm{supp}(\psi) \subseteq a$

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{x\in X} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Damit wird auf der geometr. Realisierung von $\Delta_{\leq a} = \{ b \in \Delta \mid b \leq a \}$ eine Metrik definiert und $|\Delta_{\leq a}|$ ist homöomorph zu einem $\dim(a)$-dimensionalen Ball (ÜA).

Man sagt, dass eine Teilmenge $W \subseteq |\Delta|$ offen (in der schwachen Topologie) ist, wenn für jedes $a \in \Delta$ der Schnitt $W \cap |\Delta_{\leq a}|$ offen in $|\Delta_{\leq a}|$ ist. Das ist in der Tat eine Topologie (ÜA) mit guten Eigenschaften. #

Wir haben benutzt: $\Delta_{\leq a} \subseteq \Delta$ ist ein <u>Unterkomplex</u>, d.h. eine Teilmenge, die unter Abstieg abgeschlossen ist.

Wir benötigen etwas linearer Algebra.

3. **Lemma** Seien $U_1 \subseteq \dots \subseteq U_n$ zwei
$W_1 \subseteq \dots \subseteq W_n$

maximale Fahnen der Länge n in V. Dann gibt es eine Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n+1\})$ und eine Basis $b_1, \dots, b_{n+1}$ mit

$$U_j = \mathrm{span}\{b_1, \dots, b_j\} \qquad 1 \le j \le n$$
$$W_j = \mathrm{span}\{b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)}\}$$

Bew. $\underline{n=1}$ Ist $U_1 = W_1 \rightsquigarrow$ klar

Ist $U_1 \neq W_1 \rightsquigarrow V = U_1 \oplus W_1 \rightsquigarrow$ auch klar

Jetzt Induktion nach n. Setze $U_0 = W_0 = 0$ und $U_{n+1} = W_{n+1} = V$.

1. Fall Ist $U_n = W_n$, so gibt es $\pi \in \mathrm{Sym}\{1, \dots, n\}$ sowie Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ mit

$$U_j = \mathrm{span}\{b_1, \dots, b_j\}$$
$$W_j = \mathrm{span}\{b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)}\}$$

Wähle $b_{n+1} \in V \setminus U_n$, setze $\pi(n+1) = n+1 \rightarrow$ fertig.

2. Fall Ist $U_n \neq W_n$ so setze $W_j' = U_n \cap W_j$.

Da U_n eine Hyperebene in V ist, gilt

$$\dim(W_j') + 1 \ge \dim(W_j)$$

[Betrachte dazu $p: W_j \longrightarrow V/U_n$

$$\dim(W_j) = \dim(\underbrace{\ker(p)}_{= W_j \cap U_n}) + \underbrace{\dim(p(W_j))}_{\le 1}$$]

Folglich gibt es genau ein k mit

$$W_k' = W_{k+1}'$$

Nach Ind. Annahme gibt es eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von U_n und $\pi \in \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\})$ mit

$$U_j = \mathrm{span}\{b_1, \dots, b_j\}$$

$$W_j = \mathrm{span}\{b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)}\} = W_j' \qquad j \le k$$

$$W_{j+1}' = \mathrm{span}\{b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)}\} \qquad j \ge k$$

Wähle $b_{n+1} \in W_{k+1} \setminus U_n$, also $W_{k+1} = W_k \oplus b_{n+1} K$

es folgt $W_{j+1} = \mathrm{span}\{b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)}, b_{n+1}\}$ $j \ge k$.

$\square$

<u>Bem</u> Man kann zeigen, dass π durch die beiden Fahnen $\{U_1, \dots, U_n\}$, $\{W_1, \dots, W_n\}$ eindeutig bestimmt ist (die Basis $b_1, \dots, b_{n+1}$ ist natürlich i. A. <u>nicht</u> eindeutig bestimmt).

4. <u>Def</u> Ist $\{b_1, \dots, b_{n+1}\} = \mathcal{B}$ eine Basis, so sei $\Sigma(\mathcal{B})$ die Menge aller Fahnen $\{U_1 \subseteq \dots \subseteq U_k\}$, für die gilt: jedes U_j wird von einer Teilmenge von $\mathcal{B}$ aufgespannt.

Dann ist $\Sigma(\mathcal{B})$ ein Unterkomplex von $\Delta(V)$. Wir nennen $\Sigma(\mathcal{B})$ ein <u>Appartment</u>. Die maximalen Fahnen heißen auch <u>Kammern</u>.

Lemma 3 besagt also: zwei Kammern in $\Delta(V)$ liegen immer in einem Appartment.

Die "architektonische" Terminologie stammt von Bourbaki: In der Liealgebra von $Sl_{n+1}\mathbb{C}$ gibt es "Weylkammern" (bestimmte Polytope), die eins zu eins den Kammern in $\Delta(V)$ entsprechen.
Wir werden später sehen: $\Delta(V)$ ist ein <u>Gebäude</u> – und besteht aus Kammern und Appartments.

<u>Bemerkung</u> Die geometrische Realisierung von $\Sigma(\mathcal{B})$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Sphäre

$\to$ ÜA!
Beachte auch: die kombinatorische Struktur von $\Sigma(\mathcal{B})$ hängt nur von n ab, nicht vom Körper K.

Die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(\{1, \dots, n+1\})$ operiert auf der Basis $\mathcal{B}$ und damit auf $\Sigma(\mathcal{B})$. Diese Gruppe ist ein Beispiel einer <u>Coxetergruppe</u>, die wir nun genauer betrachten.