§2 Komplexe Differenzierbarkeit

Erinnerung an Analysis I. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $x \in J$, sei $f\colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f *differenzierbar* in x, mit Ableitung $a = f'(x)$, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

existiert.

Diese Gleichung ist eine Kurzschreibweise für folgende Aussage: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $h \neq 0$ mit $|h| \leq \delta$ und $x + h \in J$ gilt

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a \right| \leq \varepsilon.$$

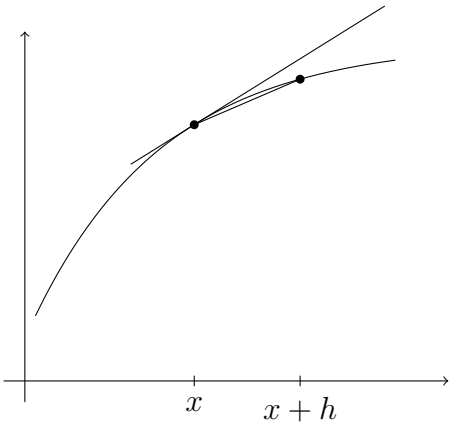
Wir setzen

$$\theta(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} & \text{für } h \neq 0,\ x+h \in J, \\ a & \text{für } h = 0. \end{cases}$$

Dann ist θ stetig in $h = 0$ (s. o.) und auch stetig für $h \neq 0$, also stetig. Es gilt also

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot \theta(h).$$

Geometrische Interpretation: für $h \neq 0$ ist $\theta(h)$ die *Sekantensteigung*, für $h = 0$ ist $\theta(h)$ die *Tangentensteigung*, also $\theta(0) = f'(x)$.



Wir verwenden diese Beobachtung, um die komplexe Differenzierbarkeit zu definieren.

2.1 Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, sei $z \in \Omega$, sei $r > 0$ so gewählt, dass $B_r(z) \subseteq \Omega$ gilt (Ω ist offen!). Wir nennen f *komplex differenzierbar in* z, falls es eine stetige Abbildung $\theta\colon B_r(0) \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z+h) = f(z) + h \cdot \theta(h) \qquad \text{für alle } h \in B_r(0).$$

Dann heißt $f'(z) = \theta(0)$ die (komplexe) *Ableitung* von f im Punkt z. Die stetige Funktion θ ist durch f eindeutig bestimmt, denn für $h \neq 0$ gilt $\theta(h) = \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$, und $\theta(0) = \lim_{h \to 0} \theta(h)$. Falls f in jedem Punkt $z \in \Omega$ differenzierbar ist, so heißt f *komplex differenzierbar* oder *holomorph* auf Ω.

2.2 Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, $z \in \Omega$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist komplex differenzierbar in z, mit Ableitung $f'(z) = a$.

(ii) Es gilt $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = a$, d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass gilt

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - a\right| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } h \in \mathbb{C} \text{ mit } |h| < \delta,\ h \neq 0,\ z+h \in \Omega.$$

Beweis. (i)⇒(ii): Schreibe $f(z+h) = f(z) + h \cdot \theta(h)$. Für $h \neq 0$ folgt $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \theta(h)$. Da θ stetig in $h = 0$ ist, gilt (ii).

(ii)⇒(i): Definiere

$$\theta(h) = \begin{cases} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} & h \neq 0, \\ a & h = 0 \end{cases}$$

für $h \in B_r(0)$, wobei $r > 0$ so gewählt ist, dass $B_r(z) \subseteq \Omega$ gilt. Aus (ii) folgt: θ ist stetig in 0, also stetig (für $h \neq 0$ ist θ stetig, da f stetig ist), und für alle $h \in B_r(0)$ gilt $f(z+h) - f(z) = h \cdot \theta(h)$. □

2.3 Beispiele

Sei $\Omega = \mathbb{C}$.

(i) $f(z) = c = \text{const}$ ist holomorph (mit $\theta = 0$), $f'(z) = 0$.

(ii) $f(z) = z$ ist holomorph mit $\theta(h) = 1$, also $f'(z) = 1$.

(iii) $f(z) = z^2$ ist holomorph, denn

$$f(z+h) - f(z) = (z+h)^2 - z^2 = 2hz + h^2 = h(2z+h)$$

$\Rightarrow \theta(h) = 2z + h$ und $f'(z) = 2z$.

(iv) $f(z) = \overline{z}$ ist in keinem Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn: $f(z+h) - f(z) = \overline{z+h} - \overline{z} = \overline{h} \overset{!}{=} h \cdot \theta(h) \Rightarrow \theta(h) = \frac{\overline{h}}{h}$ für $h \neq 0$. Für $h \in \mathbb{R}$ ist $\frac{\overline{h}}{h} = 1$, aber für $h = it$ mit $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ ist $\frac{\overline{h}}{h} = -1$. Wäre θ stetig in 0, dann wäre $1 = -1$. Also gibt es kein stetiges θ mit $\overline{h} = h\theta(h)$.

2.4 Rechenregeln für Ableitungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, sei $z \in \Omega$. Seien f, g komplex differenzierbar in z, mit Ableitungen $f'(z)$, $g'(z)$. Dann gilt:

(i) Die Funktion $f + g\colon w \mapsto f(w) + g(w)$ ist komplex differenzierbar in z, mit Ableitung $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
Denn:

$$f(z+h) = f(z) + h\,\theta_1(h), \quad f'(z) = \theta_1(0), \qquad g(z+h) = g(z) + h\,\theta_2(h), \quad g'(z) = \theta_2(0).$$

Dann gilt

$$(f+g)(z+h) = f(z+h) + g(z+h) = f(z) + g(z) + h \underbrace{\big(\theta_1(h) + \theta_2(h)\big)}_{=:\theta(h)},$$

und $\theta(0) = \theta_1(0) + \theta_2(0) = f'(z) + g'(z)$. □

(ii) Die Funktion $f \cdot g \colon w \mapsto f(w) \cdot g(w)$ ist komplex differenzierbar in z, mit Ableitung $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
Denn:

$$f(z+h)g(z+h) = f(z)g(z) + h\Big(f(z)\theta_2(h) + g(z)\theta_1(h) + h\,\theta_1(h)\theta_2(h)\Big)$$

$\Rightarrow \theta(h) = f(z)\theta_2(h) + g(z)\theta_1(h) + h\,\theta_1(h)\theta_2(h)$ und

$$\theta(0) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z).$$

□

(iii) Ist $f(w) \neq 0$ für alle $w \in \Omega$, so ist $\frac{1}{f} \colon w \mapsto \frac{1}{f(w)}$ komplex differenzierbar in z, mit

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = \frac{-f'(z)}{f(z)^2}.$$

Denn:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)(z+h) - \left(\frac{1}{f}\right)(z) &= \frac{1}{f(z) + h\theta_1(h)} - \frac{1}{f(z)} \\ &= \frac{f(z) - f(z) - h\,\theta_1(h)}{f(z)^2 + h\,\theta_1(h)f(z)} \\ &= h \underbrace{\left(\frac{-\theta_1(h)}{f(z)^2 + h\,\theta_1(h)f(z)}\right)}_{=\theta(h)},\end{aligned}$$

und $\theta(0) = \dfrac{-\theta_1(0)}{f(z)^2} = \dfrac{-f'(z)}{f(z)^2}$. □

(iv) Sind $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete, $f \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ stetig, $g \colon \Omega_2 \to \mathbb{C}$, sei $z \in \Omega_1$, $w = f(z)$, sei f komplex differenzierbar in z, sei g komplex differenzierbar in w. Dann ist $g \circ f$ komplex differenzierbar in z und

$$(g \circ f)'(z) = g'(w) \cdot f'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Denn:

$$f(z+h) = f(z) + h\,\theta_1(h), \qquad g(w+\tilde{h}) = g(w) + \tilde{h}\,\theta_2(\tilde{h}).$$

Mit $\tilde{h} = h\,\theta_1(h)$ folgt

$$\begin{aligned}g(f(z+h)) &= g\Big(\underbrace{f(z)}_{=w} + \underbrace{h\,\theta_1(h)}_{=\tilde{h}}\Big) = g(w) + \tilde{h}\,\theta_2(\tilde{h}) \\ &= g(w) + h \underbrace{\theta_1(h)\,\theta_2\Big(h\,\theta_1(h)\Big)}_{=\theta(h)},\end{aligned}$$

und $\theta(0) = \theta_1(0)\theta_2(0) = f'(z) \cdot g'(w)$. □

2.5 Erinnerung an Lineare Algebra I

Ein *kommutativer Ring* $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ sowie Elementen $0, 1 \in R$ so, dass gilt:

(a) $(R,+)$ ist eine *abelsche Gruppe* mit 0 als Neutralelement, d. h. $+$ ist *kommutativ*, *assoziativ*, für jedes $r \in R$ gilt $0+r=r+0=r$, für jedes $r \in R$ gibt es ein $s \in R$ mit $r+s=0$ (schreibe dann $s=-r$).

(b) die Verknüpfung $\cdot$ ist *kommutativ* und *assoziativ*, für jedes $r \in R$ gilt $1 \cdot r = r \cdot 1 = r$.

(c) es gelten die *Distributivgesetze* $r \cdot (s+t) = r \cdot s + r \cdot t$ und $(r+s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$.

Beispiele sind die kommutativen Ringe $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$

Aus (a), (b), (c) folgen weitere Rechenregeln, zum Beispiel folgt $r \cdot 0 = 0$, denn:

$$r \cdot 0 = r \cdot (0+0) = r \cdot 0 + r \cdot 0 \implies 0 = r \cdot 0 \qquad \text{(Kürzen)}.$$

Ebenso $(-r) \cdot s = -(r \cdot s)$, denn: $0 = (r-r) \cdot s = rs + (-r) \cdot s$ usw. ÜA

2.6 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann bilden die auf Ω holomorphen Funktionen einen kommutativen Ring $\mathcal{O}(\Omega)$, den* Ring der holomorphen Funktionen *auf Ω. Die Verknüpfungen sind für $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$*

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z),$$
$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z).$$

Nullelement ist die konstante Nullfunktion $z \mapsto 0$, Einselement ist die konstante Einsfunktion $z \mapsto 1$.

Beweis. Nach §2.4 gilt $f+g,\ f \cdot g \in \mathcal{O}(\Omega)$, die Null- und die Einsfunktion sind konstant, also holomorph. Setze $(-f)(z) = -f(z) \Rightarrow f + (-f) = 0 = -f + f$, $f + 0 = f = 0 + f$, $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$ usw. □

Wie „groß“ ist der Ring $\mathcal{O}(\Omega)$? Nach §2.4 folgt: $\mathcal{O}(\Omega)$ enthält alle *Polynome*

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$$

(egal wie Ω aussieht). Was ist mit Exponentialfunktion, Sinus, Kosinus, etc.? Wir betrachten jetzt komplexe Potenzreihen.

2.7 Konvergenzkriterien für komplexe Reihen

(a) *Absolute Konvergenz von Reihen.* Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Dann *konvergiert* die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b$, falls gilt $\lim_m \sum_{n=0}^{m} a_n = b$. Etwas ausführlicher gesagt bedeutet das folgendes.

> Sei $s_m = a_0 + a_1 + \cdots + a_m$. Man nennt s_m die m-te *Partialsumme*. Die Konvergenz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b$ bedeutet ausgeschrieben, dass die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b konvergiert, also $\lim_n s_n = b$.

Falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, heißt die Reihe *absolut konvergent*. Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz, denn: sei $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$, $t_m = \sum_{n=0}^{m} |a_n|$. Dann bilden die t_m eine Cauchy-Folge (konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen). Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es N so, dass $|t_k - t_\ell| \le \varepsilon$ für alle $k, \ell \ge N \Rightarrow |s_k - s_\ell| \le \varepsilon$ für alle $k, \ell \ge N$ (Dreiecksungleichung) $\Rightarrow (s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C} \Rightarrow$ Konvergenz (weil $\mathbb{C}$ vollständig ist).

(b) *Das Majorantenkriterium.* Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$, mit $|a_n| \le |b_n|$ für alle n. Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

absolut.
Denn: $s_m = \sum_{n=0}^{m} |b_n|$, $t_m = \sum_{n=0}^{m} |a_n|$. Für k, ℓ gilt dann $|s_k - s_\ell| \geq |t_k - t_\ell|$. Da die s_m eine Cauchy-Folge bilden, gilt das auch für die t_m. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

(c) *Das Wurzelkriterium.* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wenn es ein λ gibt mit $0 \leq \lambda < 1$ so, dass für (fast) alle n gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \lambda$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. (*fast alle* bedeutet, dass es höchstens endlich viele Ausnahmen gibt).
Denn: angenommen, $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \lambda$ für alle $n \Rightarrow |a_n| \leq \lambda^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ konvergiert (absolut) für $0 \leq \lambda < 1 \Rightarrow$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium.
Allgemeiner Fall: $|a_n| \leq \lambda^n$ für alle $n \geq N$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} |a_n|}_{\text{konstant}} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|}_{\text{konvergiert (s. o.)}} \quad \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent.}$$

(d) *Das Quotientenkriterium.* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, seien alle $a_n \neq 0$. Wenn es ein λ gibt mit $0 \leq \lambda < 1$ so, dass für alle n gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
Beweis. Es folgt $|a_n| \leq \lambda^n |a_0|$, wir können das Majorantenkriterium anwenden mit $b_n = \lambda^n |a_0|$. Da die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ für $|\lambda| < 1$ absolut konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut. □
Bemerkung. Marjoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterium sind auch noch anwendebar, wenn die entsprechenenden Ungleichungen für *fast alle* Folgeglieder gelten.

2.8 Erinnerung: Limes superior

Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Der *Limes superior* ist

$$\limsup_n r_n = \lim_n \Big(\sup\{r_n, r_{n+1}, \dots\}\Big) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Äquivalente Beschreibung: $H = \{h \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mid r_n \leq h \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$,

$$\limsup_n r_n = \inf(H).$$

Andere Schreibweise: $\overline{\lim}_n r_n = \limsup_n r_n$.

2.9 Definition. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \colon X \to \mathbb{C}$.

> Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig auf* X gegen eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{C}$, wenn gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $z \in X$ und alle $n \geq m$ gilt $|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$ (m hängt *nicht* von z ab).

Satz A. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n \colon X \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f auch stetig.*

Beweis. Sei $z \in X$, sei $\varepsilon > 0$. Wähle m so, dass $|f_m(w) - f(w)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $w \in X$. Da f_m stetig ist, gibt es $\delta > 0$ so, dass $|f_m(z) - f_m(w)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $w \in X$ mit $|z - w| \leq \delta$. Es folgt für $|z - w| \leq \delta$, dass

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(w)| + |f_m(w) - f(w)| \leq \varepsilon.$$

□

Das folgende Kriterium werden wir immer wieder brauchen.

Satz B. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $z \in X$, $k, \ell \geq m$ gilt

$$|f_k(z) - f_\ell(z)| \leq \varepsilon$$

(Cauchy-Kriterium).

Beweis. (i)⇒(ii): Wähle m so, dass für alle $z \in X$, $n \geq m$ gilt $|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Für $k, \ell \geq m$ gilt dann

$$|f_k(z) - f_\ell(z)| \leq |f_k(z) - f(z)| + |f(z) - f_\ell(z)| \leq \varepsilon.$$

(ii)⇒(i): Für jedes $z \in X$ ist die Folge $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, also konvergent. Definiere $f(z) = \lim_n f_n(z)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $|f_k(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$ für alle $n, k \geq m$ und alle $z \in X$. Im Grenzwert $n \to \infty$ folgt $|f_k(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ für alle $z \in X$ und alle $k \geq m$. Nach Satz A ist f stetig. □

2.10 Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir nennen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine *Potenzreihe* (in der Variablen z).

2.11 Theorem (Abels Theorem)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe. Dann gibt es R mit $0 \leq R \leq \infty$ so, dass Folgendes gilt:*

(i) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut.

(ii) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (d. h. sie konvergiert nicht).

(iii) Die Funktion $z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist holomorph auf $B_R(0)$ wenn $R > 0$ ist, mit Ableitung $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$.

(iv) Ist $0 < r < R$, so konvergiert die Folge $f_m = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$ auf der Kreisscheibe $B_r(0)$ gleichmäßig gegen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

(v) Mit $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ gilt $R = \frac{1}{L}$ (mit $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$) (Hadamards Formel).

Beweis. Wir setzen $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$ sowie $R = \frac{1}{L}$ (mit $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$). Damit gilt (v) nach Definition von R; es bleibt zu zeigen, dass dieses R die Aussagen (i)–(iv) erfüllt.

Zu (ii). Ist $|z| > R$, so wähle r mit $R < r < |z|$. Es folgt $\frac{1}{r} < \frac{1}{R} = L$, also gibt es unendlich viele n mit $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{r} \Rightarrow |a_n| \geq \frac{1}{r^n} \Rightarrow |a_n z^n| \geq \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \geq 1$ für unendlich viele n. Insbesondere ist $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ⇒ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist divergent. (Wenn die Summanden einer Reihe keine Nullfolge bilden, dann bilden die Partialsummen keine Cauchyfolge, also ist die Reihe divergent.) Damit ist (ii) bewiesen.

Zu (i). Sei nun $|z| < R$, wähle r mit $|z| < r < R$. Dann gilt $\frac{1}{r} > \frac{1}{R} = L$, also ist $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r}$ für fast alle n. Es folgt $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \leq \frac{|z|}{r} < 1$ für fast alle n. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut. Damit ist (i) bewiesen.

Zu (iv). Sei $0 < r < R$, wähle s mit $r < s < R$. Dann ist $\frac{1}{s} > \frac{1}{R} = L$, also gibt es n_0 so, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{s}$ für alle $n \ge n_0$. Für alle z mit $|z| \le r$ und alle $n \ge n_0$ folgt

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} \le \frac{r}{s} \implies |a_n z^n| \le \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Für $f_k(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$ folgt nun für $k \ge \ell \ge n_0$

$$\begin{aligned} |f_k(z) - f_\ell(z)| = |a_{\ell+1} z^{\ell+1} + \cdots + a_k z^k| &\le \left(\frac{r}{s}\right)^{\ell+1} + \cdots + \left(\frac{r}{s}\right)^k \\ &\le \left(\frac{r}{s}\right)^{\ell+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^n = \left(\frac{r}{s}\right)^{\ell+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{r}{s}}. \end{aligned}$$

Für ℓ hinreichend groß ist das beliebig klein (unabhängig von z, solange $|z| < r$), also konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $B_r(0)$ gleichmäßig gegen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (§2.9, Satz B). Damit ist (iv) bewiesen.

Zu (iii). Betrachte nun die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$.

Zwischenschritt: es gilt $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$, denn: $\sqrt[n]{n} = 1 + c_n$ mit $c_n \ge 0$, also

$$\begin{aligned} (1+c_n)^n = n \ge 1 + \frac{n(n-1)}{2} c_n^2 \quad &\text{(Binomialsatz, für } n \ge 2) \\ \implies c_n^2 \le \frac{2}{n} \implies \lim_n c_n &= 0. \end{aligned}$$

und damit $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$, Ende des Zwischenschrittes.

Es folgt daraus

$$\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n = z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$ hat also den gleichen Konvergenzradius R wie die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt das nach (i) und (ii) auch für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} f_m(z) &= \sum_{n=0}^{m} a_n z^n, & f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \\ g_m(z) &= \sum_{n=0}^{m} (n+1)a_{n+1} z^n, & g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} z^n \end{aligned}$$

und haben $f_m'(z) = g_{m-1}(z)$. Für $0 < r < R$ und $z, w \in B_r(0)$ mit $z \ne w$ gilt nun

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(z) = \frac{f_m(z)-f_m(w)}{z-w} - f_m'(z) + \underbrace{\big(f_m'(z) - g(z)\big)}_{=A_m} + \underbrace{\frac{R_m(z)-R_m(w)}{z-w}}_{=B_m},$$

$$\text{wobei } R_m(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k z^k.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} B_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \Big(\frac{z^k - w^k}{z-w}\Big) &\overset{(*)}{=} \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \big(z^{k-1} + z^{k-2}w + \cdots + w^{k-1}\big) \\ \implies |B_m| &\le \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \cdot k \cdot r^{k-1}. \end{aligned}$$

Dabei ist (*) die Gleichung

$$\left(z^{k-1}+z^{k-2}w+\cdots+w^{k-1}\right)(z-w) = z^k+z^{k-1}w+\cdots+zw^{k-1}-z^{k-1}w-\cdots-w^k = z^k-w^k.$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\cdot k\cdot r^{k-1}$ konvergiert (siehe oben), gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein n so, dass $|B_m|\le\frac{\varepsilon}{3}$ für alle $m\ge n$. Die Folge f'_m konvergiert auf $B_r(0)$ gleichmäßig gegen g (siehe oben), also gibt es n so, dass $|A_m|\le\frac{\varepsilon}{3}$ für $m\ge n$. Wir finden also ein m mit $|A_m|,|B_m|\le\frac{\varepsilon}{3}$. Da f_m holomorph ist, gibt es (für dieses m) ein $\delta>0$ so, dass

$$\left|\frac{f_m(z)-f_m(w)}{z-w}-f'_m(z)\right|\le\frac{\varepsilon}{3}\qquad\text{für } |z-w|\le\delta.$$

Insgesamt erhalten wir also für $|z-w|\le\delta$, dass

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(z)\right|\le\varepsilon$$

und damit gilt $g(z)=f'(z)$ und (iii) ist gezeigt. □

Das war ein tiefer Satz mit einem relativ komplizierten Beweis. Jetzt wenden wir ihn an.

2.12 Beispiele

(a) *Die geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. Hier gilt $a_n=1$ für alle n, also $L=\limsup_n\sqrt[n]{1}=1$ $\Rightarrow R=\frac{1}{L}=1$. Da

$$(1-z)\sum_{n=0}^{m}z^n=\sum_{n=0}^{m}z^n-\sum_{n=1}^{m+1}z^n=1-z^{m+1}$$

gilt, ist $f_m(z)=\sum_{n=0}^{m}z^n=\dfrac{1-z^{m+1}}{1-z}$. Nun gilt für $|z|<1$, dass $\lim_m z^m=0$, denn: setze $\frac{1}{|z|}=1+r$. Nach der *Bernoullischen Ungleichung* (→ Analysis I) ist $(1+r)^n\ge 1+r\cdot n$, also $|z|^n\le\frac{1}{1+r\cdot n}$). Es folgt

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}$$

und mit Ableiten

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\frac{1}{(1-z)^2}.$$

Beachte: Die Funktion $z\mapsto\frac{1}{1-z}$ ist holomorph auf $\Omega=\mathbb{C}-\{1\}$. Für $|z|>1$ gilt aber *nicht* $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, da die rechte Seite divergent ist nach Abels Theorem §2.11 (ii).

(b) *Die Exponentialreihe* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. Die Hadamard-Formel $L=\limsup_n\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$ bringt uns hier nicht weiter. Aber wir können mit dem Quotientenkriterium zeigen, dass die Reihe für alle $z\in\mathbb{C}$ konvergiert. Setze $\lambda=\frac{1}{2}$. Für $n\ge 2|z|$ gilt

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{z^n}{n!}\right|=\left|\frac{z}{n+1}\right|\le\frac{1}{2},$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut. Es folgt $R = \infty$, d. h. die Funktion $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist holomorph auf $\Omega = \mathbb{C}$. Weiter gilt

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

(c) *Die trigonometrischen Funktionen*

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Wie in (b) folgt mit dem Quotientenkriterium, dass $R = \infty$ gilt, d. h. beide Reihen konvergieren auf $\Omega = \mathbb{C}$ absolut und sin und cos sind holomorph. Weiter gilt

$$\cos'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) z^{2n-1}}{(2n)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z)$$

sowie $\sin'(z) = \cos(z)$. Weiter gilt

$$\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(z) + i \cdot \sin(z).$$

Das ist die *Eulersche Formel*,

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \cdot \sin(z) \qquad \text{(gültig für alle } z \in \mathbb{C})$$

(d) *Die logarithmische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$. Es gilt $L = \limsup_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, (vgl. den Beweis von Abels Theorem §2.11 (iii)), also $R = 1$. Schreibe $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$. Es folgt

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot z^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \qquad \text{für } |z| < 1.$$

2.13 Erinnerung an Analysis II

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, sei $f\colon U \to \mathbb{R}^\ell$ stetig. Dann heißt f *total differenzierbar* im Punkt $u \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ gibt, so dass gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \Big\| f(u+h) - f(u) - T(h) \Big\| = 0.$$

Dabei ist $h \in \mathbb{R}^k$ ein Vektor. Die lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ heißt dann die *totale Ableitung* von f im Punkt p. Wir betrachten $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, also den Fall $k = \ell = 2$.

Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Falls f im Punkt $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist, so ist f in z total differenzierbar. Die totale Ableitung ist dann die lineare Abbildung*

$$T(h) = f'(z) \cdot h.$$

Beweis. Schreibe $f(z+h) = f(z) + \theta(h) \cdot h$, mit $\theta(0) = f'(z)$.

$$\implies f(z+h) - f(z) - \theta(0)h = \Big(\theta(h) - \theta(0)\Big)h$$

$$\implies \lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \Big| \Big(\theta(h) - \theta(0)\Big)h \Big| = \lim_{h \to 0} \Big|\theta(h) - \theta(0)\Big| = 0.$$

□

Was ist mit der Umkehrung? Wir brauchen etwas Lineare Algebra.

2.14 Die lineare Abbildung J

Wir definieren eine lineare Abbildung $J\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $J(v) = iv$. Für die Standard-Basis $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$ von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gilt dann

$$J(e_1) = e_2, \qquad J(e_2) = -e_1,$$

d. h. $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lemma. *Sei $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung (d. h. $T(u+v) = Tu + Tv$ für alle $u, v \in \mathbb{C}$ und $T(su) = sT(u)$ für alle $s \in \mathbb{R}$). Schreibe T als 2×2-Matrix $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $TJ = JT$,

(ii) $a = d$ *und* $b = -c$,

(iii) T *ist $\mathbb{C}$-linear, d. h. für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $T(zw) = z(Tw)$.*

Beweis. (i)⇔(ii):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

(i)⇔(iii): Schreibe $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(zw) &= T(xw + iyw) \\ &= x\,T(w) + y\,T(iw) \\ &= x\,T(w) + y\,TJ(w) \\ &\text{und} \\ z\,T(w) &= x\,T(w) + iy\,T(w) \\ &= x\,T(w) + y\,JT(w). \end{aligned}$$

□

2.15 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, sei $z \in \Omega$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist in z total differenzierbar, mit totaler Ableitung $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, und T erfüllt die äquivalenten Bedingungen aus §2.14.

(ii) f ist in z komplex differenzierbar.

Beweis. (ii)⇒(i) mit §2.13 und §2.14: die totale Ableitung $T(h) = f'(z)h$ ist $\mathbb{C}$-linear.
(i)⇒(ii): Definiere

$$\theta(h) = \begin{cases} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} & \text{für } h \neq 0, \\ T(1) = w \in \mathbb{C} & \text{für } h = 0, \end{cases} \qquad \text{wobei } 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt, da T $\mathbb{C}$-linear ist $T(h) = h\,T(1) = h\,w$, also

$$f(z+h) - f(z) - T(h) = h \cdot \theta(h) - h\,w = h(\theta(h) - w).$$

Wegen

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|}|f(z+h) - f(z) - T(h)| = \lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|}|h\,\theta(h) - h\,w| = \lim_{h\to 0}(\theta(h) - w) = 0$$

ist θ stetig in $h = 0$ und stetig in allen $h \neq 0$, da f stetig ist. □

Satz 2.15 wird klassisch über die *Cauchy-Riemann-Gleichungen* ausgedrückt. Schreibe dazu $f(z) = u(z) + i\,v(z)$, $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ und $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$, also $f(z) = \binom{u(z)}{v(z)} \in \mathbb{R}^2$. Die Matrix der totalen Ableitung ist die *Jacobi-Matrix*,

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(z) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(z) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix}.$$

Erinnerung. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und ist $h\colon U \to \mathbb{R}^\ell$ total differenzierbar in $p \in U$, $h(w) = \Big(h_1(w), \dots, h_\ell(w)\Big)^T$, so ist

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p) = \frac{d}{dt}\Big(h_i(p + te_j)\Big)\Big|_{t=0}, \qquad e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die totale Ableitung hat die *Jacobi-Matrix*

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_\ell}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial h_\ell}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}.$$

Korollar. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, $z \in \Omega$, so ist $f = u + iv$, $u = \mathrm{Re}(f)\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $v = \mathrm{Im}(f)\colon \Omega \to \mathbb{R}$, genau dann komplex differenzierbar im Punkt z, wenn f in z total differenzierbar ist* und *wenn die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten,*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(z) + \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0.$$

Beispiele. (a) $f(z) = x^2$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $u(z) = x^2$, $v(z) = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{\partial v}{\partial x}(z) = 0.$$

$\Rightarrow f$ ist genau für $\mathrm{Re}(z) = 0$ komplex differenzierbar.

(b) $f(z) = \overline{z}$, $u(z) = x$, $v(z) = -y$, $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y}(z) = -1$ $\Rightarrow f$ nirgends komplex differenzierbar.

2.16 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:*

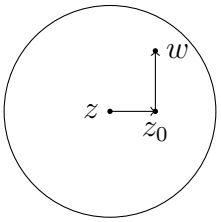
(i) f ist konstant.

(ii) f ist holomorph auf Ω, mit $f'(w) = 0$ für alle $w \in \Omega$.

Beweis. (i)⇒(ii): $f(w) = c = \text{const}$, $f(z+h) - f(z) = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow f'(z) = 0$.
(ii)⇒(i): Für alle $z \in \Omega$ gilt dann für $f = u + iv$, $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(z) \subseteq \Omega$ gilt. Für $w \in B_\varepsilon(z)$ laufen wir zuerst von z horizontal nach $z_0 = z + t_1$ und dann vertikal von z_0 nach $w = z_0 + it_2$, mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.



Es gilt dann mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$u(z+t_1) - u(z) = \int_0^{t_1} \frac{\partial u}{\partial x}(z+s)\,ds = 0$$
$$u(z_0+it_2) - u(z_0) = \int_0^{t_2} \frac{\partial u}{\partial y}(z_0+is)\,ds = 0.$$

Es folgt $u(w) = u(z)$ für alle $w \in B_\varepsilon(z)$. Genauso ist $v(w) = v(z)$ für alle $w \in B_\varepsilon(z) \Rightarrow f(z) = f(w)$ für alle $w \in B_\varepsilon(z) \Rightarrow f$ ist *lokal konstant*.

Sei nun $w \in \Omega$ beliebig. Da Ω ein Gebiet ist, gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$. Zu jedem $s \in [0,1]$ gibt es ein $\varepsilon_s > 0$ so, dass $f(\gamma(s)) = f(\gamma(t))$ für alle t mit $|s-t| < \varepsilon_s$ (siehe oben, f ist lokal konstant) ⇒ die Funktion $h\colon t \mapsto u(\gamma(t))$ ist lokal konstant ⇒ $h' = 0$ ⇒

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s)\,ds = 0$$

⇒ $u(z) = u(w)$, genauso $v(z) = v(w) \Rightarrow f(z) = f(w)$. □

Korollar. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sind $g, f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und gilt $f' = g'$ auf Ω, so gibt es $c \in \mathbb{C}$ so, dass $f(z) = g(z) + c$ für alle $z \in \Omega$, kurz $f = g + c$.*

2.17 Satz (Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt* $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$. *Weiter gilt* $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$. *Insbesondere ist* $\exp(z) \neq 0$ *für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Direkt mit der Exponentialreihe folgt $\exp(0) = 1$. Betrachte nun die holomorphe Funktion $f(z) = \exp(z) \cdot \exp(z_0 - z)$. Es gilt

$$f'(z) = \exp(z) \cdot \exp(z_0 - z) - \exp(z) \cdot \exp(z_0 - z) = 0,$$

also

$$\exp(z) \cdot \exp(z_0 - z) = \text{const.}$$

Für $z = 0$ erhalten wir $c = \exp(z_0)$, also gilt allgemein $\exp(z)\exp(z_0 - z) = \exp(z_0)$. Setze jetzt $z_0 = z + w \Rightarrow w = z_0 - z$, $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$. Insbesondere ist $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$, damit $\exp(z) \neq 0$ und folglich $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$. □

Beachte auch:

$$\exp(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\overline{z}^n = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n} = \overline{\exp(z)}.$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $|\exp(iy)|^2 = \exp(iy)\exp(-iy) = 1$ und damit $|\exp(x+iy)|^2 = \exp(x)^2$. Für $x > 0$ ist $\exp(x) > 1$, damit auch $0 < \exp(-x) < 1$. Insgesamt folgt $|\exp(x + iy)| = \exp(x)$ oder

$$|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z)).$$

2.18 Die trigonometrischen Funktionen (2)

Es gilt mit Eulers Formel für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\tfrac{1}{2}\Big(\exp(iz) + \exp(-iz)\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(z) + \cos(-z) + i\sin(z) + i\sin(-z)\Big) = \cos(z),$$

weil $\cos(z) = \cos(-z)$, $\sin(z) = -\sin(-z)$ (vgl. §2.12 (c)). Entsprechend zeigt man $\dfrac{1}{2i}\Big(\exp(iz) - \exp(-iz)\Big) = \sin(z)$. Daraus folgt

$$\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1,$$

denn $\frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2 = ab$ und $\exp(iz)\exp(-iz) = 1$.

2.19 Die Kreiszahl π

Wir betrachten jetzt die Kreiszahl π.

Beobachtung: die Gleichung $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$ zusammen mit $\exp(z) \neq 0$ besagt, dass die Exponentialfunktion ein *Homomorphismus* der abelschen Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ in die abelsche Gruppe $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ist (wobei $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$). Der *Kern* dieses Homomorphismus ist die Menge

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = 1\}.$$

Ist $\exp(z) = 1$, so ist $\mathrm{Re}(z) = 0$ (s. o.), also ist jedes $z \in K$ von der Form $z = it$ für ein $t \in \mathbb{R}$.

Ist $t \in \mathbb{R}$, so ist $\sin(t), \cos(t) \in \mathbb{R}$ und damit folgt wegen $\sin^2 + \cos^2 = 1$, dass $|\sin(t)|, |\cos(t)| \leq 1$. Also ist

$$\sin(t) = \sin(0) + \int_0^t \cos(s)\, ds \leq t \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Damit folgt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \cos'(t) = -\sin(t) \geq -t, \\
&\Longrightarrow \cos(t) = \cos(0) + \int_0^t (-\sin(s))\, ds \geq 1 - \frac{t^2}{2}, \\
&\Longrightarrow \sin(t) = \sin(0) + \int_0^t \cos(s)\, ds \geq t - \frac{1}{6}t^3, \\
&\Longrightarrow \cos(t) = \cos(0) - \int_0^t \sin(s)\, ds \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}.
\end{aligned}$$

Für $t = \sqrt{3}$ ist $\cos(t) \leq 1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{24} = -\frac{1}{8}$. Nach dem *Zwischenwertsatz* gibt es $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ mit $\cos(\alpha) = 0$. Es folgt $\sin(\alpha) \geq \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 = \alpha(1 - \frac{1}{6}\alpha^2) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$, also $\sin(\alpha) = 1$. Wir definieren die Kreiszahl π durch $\pi = 2 \cdot \alpha$.

#