§1 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

1.1 Definition. Die *Gaußsche Zahlenebene* ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Damit ist $\mathbb{C}$ ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum. Die Elemente von $\mathbb{C}$ heißen *komplexe Zahlen*. Wir definieren eine Verknüpfung, die *komplexe Multiplikation*

$$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}, \qquad (u,v)\longmapsto uv,$$

für $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$ durch

$$uv = (u_1v_1 - u_2v_2,\ u_1v_2 + u_2v_1).$$

Elementares Nachrechnen zeigt: diese Verknüpfung ist

- kommutativ: $uv = vu$ für alle $u,v\in\mathbb{C}$,
- assoziativ: $(uv)w = u(vw)$ für alle $u,v,w\in\mathbb{C}$,
- distributiv: $(u+v)w = uw+vw$ und $u(v+w) = uv+uw$.

Für die Standard-Basis $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ von $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} e_1u = ue_1 = u &\quad \text{für alle } u\in\mathbb{C},\\ e_2^2 = -e_1,&\\ 0u = u0 = 0 &\quad \text{für alle } u\in\mathbb{C},\ \text{wobei } 0=(0,0) \text{ der Nullvektor ist.}\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $\mathbb{C}$ ist ein kommutativer Ring (mit Nullelement $0=(0,0)$, Einselement $1=e_1$). Wir definieren die komplexe Zahl $i=e_2=(0,1)$, damit gilt $i^2=-1$ (denn $e_2^2=-e_1$).

Der *Betrag* einer komplexen Zahl (u_1,u_2) ist

$$|(u_1,u_2)| = \sqrt{u_1^2+u_2^2} \qquad (= \text{euklidische Norm des Vektors } (u_1,u_2)=u).$$

Klar: $|u|\geq 0$, und $|u|=0$ gilt genau dann, wenn $u=0$. Es gilt $|uv| = |u|\cdot|v|$, weil $(u_1v_1-u_2v_2)^2+(u_1v_2+u_2v_1)^2 = (u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)$, die gemischten Terme $\pm 2u_1v_1u_2v_2$ heben sich weg.

Die *komplexe Konjugation* ist definiert durch

$$u=(u_1,u_2), \qquad \overline{u}=(u_1,-u_2).$$

Für die komplexe Konjugation gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \overline{uv} &= \overline{u}\,\overline{v} && \text{für alle } u,v\in\mathbb{C},\\ \overline{\overline{u}} &= u && \text{für alle } u\in\mathbb{C},\\ \overline{u+v} &= \overline{u}+\overline{v} && \text{für alle } u,v\in\mathbb{C},\\ u\overline{u} &= |u|^2 && \text{für alle } u\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Die ersten drei Gleichungen sagen, dass die komplexe Konjugation ein *involutorischer Automorphismus* von $\mathbb{C}$ ist (involutorisch heisst: zweimaliges Anwenden ist die Identität).

In der dritten Gleichung identifizieren wir die reelle Zahl $|u|^2$ mit der komplexen Zahl $1|u|^2 = (u_1^2 + u_2^2, 0)$, siehe unten.

Ist $u \neq 0$, so folgt mit

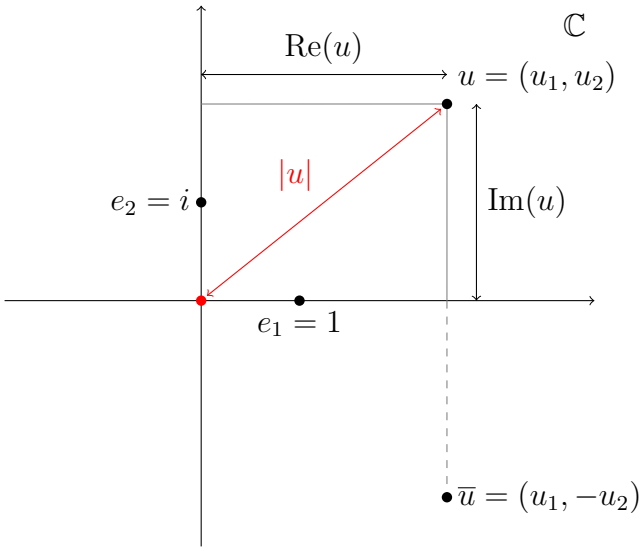
$$v = \frac{1}{|u|^2}\,\overline{u} = \left(\frac{u_1}{u_1^2+u_2^2}, \frac{-u_2}{u_1^2+u_2^2}\right),$$

dass $uv = vu = 1$. Damit ist gezeigt: $\mathbb{C}$ ist ein *Körper*, jedes $u \in \mathbb{C} - \{0\}$ hat ein multiplikatives Inverses.

Für $u = (u_1, u_2)$ heißt u_1 *Realteil* und u_2 *Imaginärteil* von u,

$$u_1 = \mathrm{Re}(u), \quad u_2 = \mathrm{Im}(u).$$

Wir betrachten das geometrisch in der komplexen Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$:

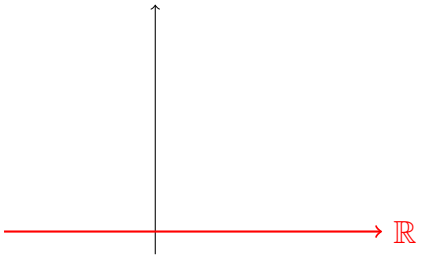


dabei ist $|u|$ der Abstand von u zum Nullpunkt 0 und $\overline{u}$ ist das Spiegelbild von u bzgl. Spiegelung an der x-Achse.

Bezüglich der Basis $e_1 = (1,0) = 1$, $e_2 = (0,1) = i$ schreibt sich die komplexe Zahl $u = (u_1, u_2)$ als

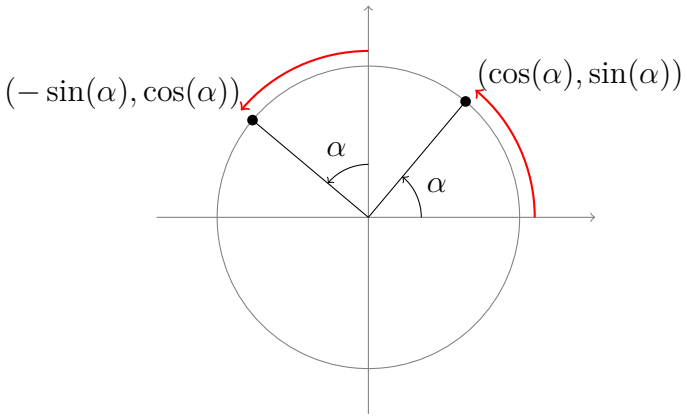
$$u = u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot i.$$

Ab jetzt benutzen wir diese Schreibweise für komplexe Zahlen. Wir identifizieren dabei die reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $(r, 0) = r \cdot 1$, d. h. *wir identifizieren* $\mathbb{R}$ *mit der* x*-Achse in* $\mathbb{R}^2$.



1.2 Die komplexen Zahlen als Drehstreckungen

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, betrachte die *Drehung* $R(\alpha)$ der Ebene um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn.



Bezüglich der Basis e_1, e_2 hat $R(\alpha)$ die Matrixgestalt

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \qquad c = \cos(\alpha),\ s = \sin(\alpha)$$

(wobei wir $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Spaltenvektoren schreiben).

Es gilt $c^2 + s^2 = 1$. Sind umgekehrt c, s reelle Zahlen mit $c^2 + s^2 = 1$, so ist (c, s) nach Pythagoras ein Punkt auf dem Einheitskreis und $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ ist eine Drehung. Es gilt

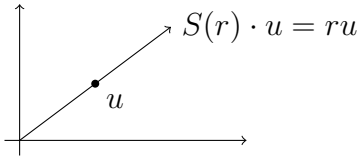
$$R(\alpha) \circ R(\beta) = R(\alpha + \beta), \qquad R(\alpha) \circ R(-\alpha) = \mathrm{id},$$

d. h. die Drehungen bilden eine (abelsche) Gruppe, die *Kreisgruppe*

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \;\middle|\; c, s \in \mathbb{R},\ c^2 + s^2 = 1 \right\}.$$

Für $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ betrachte die *Streckung*

$$S(r) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad u \mapsto ru \qquad \text{(Streckung um den Faktor } r\text{)}.$$



Das Produkt einer Drehung $R(\alpha)$ und einer Streckung $S(r)$ nennt man eine *Drehstreckung*. In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rc & -rs \\ rs & rc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

#

Umgekehrt ist jede Matrix von der Gestalt $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ eine Drehstreckung: setze $r = \sqrt{\det(M)} = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ und $c = x/r$, $s = y/r$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

mit $c^2 + s^2 = 1$. Wir setzen

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Offensichtlich gilt:

(1) C ist abgeschlossen unter Addition.

(2) C ist abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation.

Dann ist $C - \{0\}$ genau die Menge der Drehstreckungen von $\mathbb{R}^2$.

Zu (2):

$$\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 - u_2v_2 & -u_1v_2 - u_2v_1 \\ u_2v_1 + u_1v_2 & u_1v_1 - u_2v_2 \end{pmatrix} \in G.$$

In den Matrixeinträgen sehen wir genau die in §1.1 definierte komplexe Multiplikation wieder. Genauer: die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{C} \to C, \qquad u_1\,1 + u_2\,i \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$$

ist ein Isomorphismus von Ringen (oder Körpern), d. h. Φ is bijektiv mit

$$\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v), \qquad \Phi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(uv) = \Phi(u) \cdot \Phi(v)$$

Beachte auch: $\det \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2$. Für $u \neq 0$ ist die Inverse von $\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$ die Drehstreckung

$$\frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

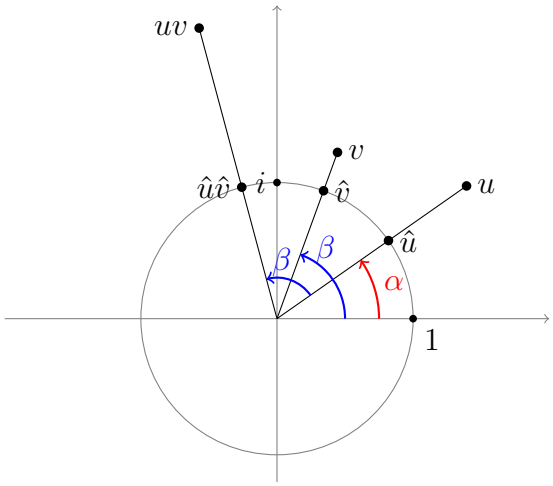
$$\det(\Phi(u)) = |u|^2,$$
$$\Phi(\overline{u}) = \Phi(u)^T \quad \text{(transponierte Matrix)},$$
$$\mathrm{Re}(u) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(\Phi(u)),$$
$$\Phi(1/u) = \tfrac{1}{\det \Phi(u)} \Phi(u)^T \quad \text{für } u \neq 0.$$

Der komplexen Zahl i entspricht die Drehung $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

Fazit: die von 0 verschiedenend komplexen Zahlen entsprechen genau den Drehstreckungen in der Ebene.

1.3 Polarkoordinaten

Beobachtung. Jede komplexe Zahl $u \neq 0$ hat eine eindeutige Darstellung $u = r \cdot \hat{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und $\hat{u} \in \mathbb{C}$ mit $|\hat{u}| = 1$. Denn dann gilt $|u| = r$ und $\hat{u} = \frac{1}{|u|}\,u$. Dabei entspricht $\hat{u}$ der *Drehung* und r der *Streckung*.



Für $u, v \neq 0$ gilt dann

$$uv = \widehat{uv} \cdot t = \hat{u}\hat{v} \cdot t, \qquad t = |u| \cdot |v|.$$

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen $u, v \neq 0$ *addieren* sich die Winkel (zur x-Achse) und *multiplizieren* sich die Längen (Beträge).

Jetzt betrachten wir Folgen und Konvergenz in $\mathbb{C}$.

1.4 Topologie in $\mathbb{C}$

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, schreibe $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Wir erinnern uns an Analysis I.

(i) Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, so dass für alle $n \geq m$ gilt $|z_n - z| \leq \varepsilon$. Schreibe dann kurz $\lim_n z_n = z$.
Äquivalent dazu: $\lim_n x_n = x$, $\lim_n y_n = y$ und $z = x + iy$. ÜA

(ii) Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *Cauchy-Folge* genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, so dass für alle $k, \ell \geq m$ gilt $|z_k - z_\ell| \leq \varepsilon$.

Jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist eine Cauchy-Folge. ÜA

Satz. *Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert, d. h. $\mathbb{C}$ ist vollständig.*

Beweis. Für jede komplexe Zahl u gilt $|\operatorname{Re}(u)|, |\operatorname{Im}(u)| \leq |u|$, denn: $u = u_1 + iu_2$ mit $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$,

$$u_1^2,\, u_2^2 \leq u_1^2 + u_2^2 \;\Rightarrow\; \operatorname{Re}(u)^2,\, \operatorname{Im}(u)^2 \leq |u|^2 \;\Rightarrow\; |\operatorname{Re}(u)|,\, |\operatorname{Im}(u)| \leq |u|.$$

Es folgt: ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so sind auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen, denn $|z_k - z_\ell| \leq \varepsilon \Rightarrow |x_k - x_\ell| \leq \varepsilon$ und $|y_k - y_\ell| \leq \varepsilon$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist (Analysis I), konvergieren beide Folgen. Setze $x = \lim_n x_n$, $y = \lim_n y_n$ und $z = x + iy$. Dann gilt $z = \lim_n z_n$ nach (i), oder auch weil gilt: $|x_n - x| \leq \varepsilon$ und $|y_n - y| \leq \varepsilon \Rightarrow |z_z - z| \leq \sqrt{2}\varepsilon$. □

#

(iii) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $u \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass gilt

$$B_\varepsilon(u) \subseteq U.$$

Dabei ist $B_\varepsilon(u) = \{v \in \mathbb{C} \mid |u - v| < \varepsilon\}$ der *ε-Ball* um u.

Beachte: $\varnothing$ und $\mathbb{C}$ sind offen.

Satz. *Der Durchschnitt von* endlich *vielen offenen Mengen ist offen. Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*

Beweis. Seien $U_1, \dots, U_m \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen, sei $u \in U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_m$. Dann gibt es zu jedem $k = 1, \dots, m$ ein $\varepsilon_k > 0$ mit $B_{\varepsilon_k}(u) \subseteq U_k$. Setze $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$. Damit ist $\varepsilon > 0$ und

$$B_\varepsilon(u) \subseteq U_k \text{ für } k = 1, \dots, m \;\Rightarrow\; B_\varepsilon(u) \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m.$$

Sei nun $\mathcal{U}$ eine Menge von beliebig vielen offenen Mengen, sei $u \in \bigcup \mathcal{U}$. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $u \in U$, also $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(u) \subseteq U$. Da $U \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ gilt, folgt $B_\varepsilon(u) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. □

Der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen *nicht* offen. ÜA

(iv) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn gilt: für *jede* Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A (also $z_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$) mit Grenzwert $\lim_n z_n = z$ gilt auch $z \in A$.

Satz. *Es gilt: $A \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $U = \mathbb{C} - A = \{u \in \mathbb{C} \mid u \notin A\}$ offen ist.*

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ und sei $U = \mathbb{C} - A$.

(a) *Wenn U offen ist, so ist A abgeschlossen.*
Denn: ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert $\lim_n z_n = z \in U$ und ist $B_\varepsilon(z) \subseteq U$, so gibt es $m \in \mathbb{N}$, so dass $z_k \in B_\varepsilon(z) \subseteq U$ gilt für alle $k \geq m$. Damit verläuft die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* in A.

(b) *Wenn U nicht offen ist, so ist A nicht abgeschlossen.*
Denn: wenn U nicht offen ist, gibt es $u \in U$, so dass für *kein* $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(u) \subseteq U$, d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $v \in A \cap B_\varepsilon(u)$. Wähle $z_n \in A \cap B_{1/n}(u)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Dann gilt $\lim_n z_n = u \notin A$, also ist A nicht abgeschlossen. □

Achtung. Es gibt (viele) Teilmengen von $\mathbb{C}$, die weder offen noch abgeschlossen sind. ÜA

Beachte: $\varnothing$ und $\mathbb{C}$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

(v) Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, sei $u \in X$.

Dann heißt f *stetig im Punkt u*, falls Folgendes gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $v \in X$ mit $|u - v| \leq \delta$ gilt $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$. Äquivalent zu Stetigkeit im Punkt u: für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit Grenzwert $\lim_n z_n = u$ konvergiert die Folge $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(u)$, kurz $\lim_n f(z_n) = f(u)$. ÜA
Letzteres wird oft so *abgekürzt*:

$$\lim_{z\to u} f(z) = f(u).$$

Wenn f in jedem $u \in X$ stetig ist, heißt f *stetig*.

Bemerkungen (über stetige Funktionen)**.** Sei $X \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Sind $f\colon X \to \mathbb{C}$ und $g\colon X \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch $f + g\colon X \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) + g(z)$ stetig und $f \cdot g\colon X \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) \cdot g(z)$ ist stetig. Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in X$, so ist auch $\frac{1}{f}\colon X \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ stetig.

(b) Ist $Y \subseteq \mathbb{C}$ mit $f(X) \subseteq Y$ und sind $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Komposition $g \circ f\colon z \mapsto g(f(z))$ stetig.

(c) Jede konstante Funktion ist stetig und $\mathrm{id} : z \mapsto z$ ist stetig.

(d) Aus (a), (c) folgt: jede Polynomfunktion

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C},$$

ist stetig.

(e) Setze $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$, $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$. Dann gilt $f(z) = u(z) + i\,v(z)$; folglich ist f genau dann stetig, wenn u und v stetig sind.

ÜA

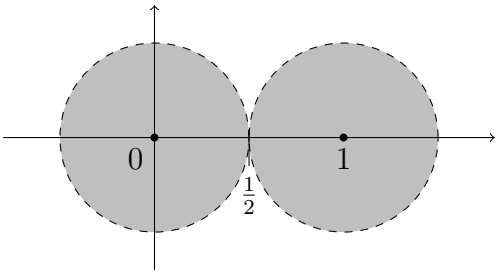
#

1.5 Definition. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ stetig. Dann heißt γ ein *Weg in X* von $a = \gamma(0)$ nach $b = \gamma(1)$. Wenn es für alle $a, b \in X$ stets einen Weg von a nach b gibt, heißt X *wegzusammenhängend*.

Beispiele. (a) $\mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend: für $a, b \in \mathbb{C}$ setze $\gamma(t) = t \cdot b + (1-t) \cdot a$.

(b) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend (genauso wie in (a)).

(c) $X = B_{\frac{1}{2}}(0) \cup B_{\frac{1}{2}}(1)$ ist nicht wegzusammenhängend.



Denn: angenommen, γ wäre ein Weg in X von 0 nach 1. Betrachte die stetige Abbildung $f(t) = \mathrm{Re}(\gamma(t))$. Es gilt $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Nach dem *Zwischenwertsatz* (Analysis I) gibt es $s \in [0,1]$ mit $f(s) = \frac{1}{2}$. Dann ist $\gamma(s) = z$ ein Punkt mit $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Aber für alle $u \in X$ gilt $\mathrm{Re}(u) \neq \frac{1}{2}$, also ist γ kein Weg in X.

#

Lemma. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ wegzusammenhängend und sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist auch $f(X) \subseteq \mathbb{C}$ wegzusammenhängend, wobei $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.*

Beweis. Seien $a, b \in f(X)$. Dann gibt es $u, v \in X$ mit $a = f(u)$, $b = f(v)$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg von u nach v. Dann ist $f \circ \gamma\colon [0,1] \to f(X)$ ein Weg in $f(X)$ von a nach b. □

Beobachtung. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$, sei $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg von a nach b und sei $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg von b nach c. Definiere $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Schreibe $\gamma = \gamma_2 * \gamma_1$. Dann ist $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg von a nach c.

Beweis. (1) Klar: γ ist stetig in jedem Punkt $t \neq \frac{1}{2}$.
(2) γ ist stetig im Punkt $t = \frac{1}{2}$: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|t-1| \leq \delta \Rightarrow |\gamma_1(1) - \gamma_1(t)| \leq \varepsilon \quad \text{und}$$
$$|t-0| \leq \delta \Rightarrow |\gamma_2(0) - \gamma_2(t)| \leq \varepsilon.$$

Ist also $|t - \frac{1}{2}| \leq \frac{\delta}{2}$, so folgt $|\gamma(t) - \gamma(\frac{1}{2})| \leq \varepsilon$. □

1.6 Definition. Eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Gebiet* (engl. *domain*), wenn gilt:

(i) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist offen,

(ii) $\Omega \neq \varnothing$,

(iii) Ω ist wegzusammenhängend.

Beispiele. (a) $\mathbb{C} = \Omega$ ist ein Gebiet.

(b) Die Kreisscheibe $B_\varepsilon(u) = \{v \in \mathbb{C} \mid |u - v| < \varepsilon\}$ ist ein Gebiet, für jedes $u \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$.

Lemma. *Seien $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete mit $\Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_m \neq \varnothing$. Dann ist $\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_m = \Omega$ ein Gebiet.*

Beweis. Ω ist offen nach §1.4 und $\Omega \neq \varnothing$. Zu zeigen: Ω ist wegzusammenhängend. Sei $p \in \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_m$, seien $a, b \in \Omega$. Dann gibt es k, ℓ mit $a \in \Omega_k$, $b \in \Omega_\ell$. Weiter ist $p \in \Omega_k$ und $p \in \Omega_\ell$. Sei γ_1 ein Weg in Ω_k von a nach p und sei γ_2 ein Weg in Ω_ℓ von p nach b. Dann ist $\gamma = \gamma_2 * \gamma_1$ ein Weg in $\Omega_k \cup \Omega_\ell \subseteq \Omega$ von a nach b. □

Bemerkung. Das Argument zeigt auch: die Vereinigung von beliebig vielen Gebieten ist ein Gebiet, falls alle diese Gebiete mindestens einen Punkt gemeinsam haben. ÜA

Gebiete in $\mathbb{C}$ sind die Analoga von offenen Intervallen in $\mathbb{R}$.