Prof. Dr. Linus Kramer
Lawrence Lo

Wintersemester 2026/27
Universität Münster

Funktionentheorie
Blatt 4

Abgabe: 12.11.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.
Thema: Konvergenzradien der Potenzreihen.
Es seien $R_1, R_2 > 0$ die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Zeigen Sie:

a) Gilt $|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle n, so ist $R_1 \geq R_2$.
b) Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ ist $R \geq \min(R_1, R_2)$.
c) Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ ist $R \geq R_1 R_2$.

Aufgabe 2.
Thema: Cauchy-Riemann-Gleichungen und totale Differenzierbarkeit.
Bestimmen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind.

a) $f(x+iy) = x^2 + y^2$
b) $f(x+iy) = x^2 + iy^2$
c) $f(x+iy) = \dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2} + i\dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}$

Aufgabe 3.
Thema: Reelle Polynome und Nullstellen.
Sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $w = x + iy \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms (das heißt: $p(w) = 0$), so ist $\overline{w} = x - iy$ auch eine Nullstelle.

Aufgabe 4.
Thema: Eindeutigkeit bis auf Konstanten.

a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine komplex differenzierbare Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen, dass f konstant ist.
b) Seien nun $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktionen mit $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(z) = g(z) + c$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
c) Seien nun $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differnzierbare Funktionen mit $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g)$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(z) = g(z) + ic$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte.