Prof. Dr. Linus Kramer
Lawrence Lo

Wintersemester 2026/27
Universität Münster

Funktionentheorie
Blatt 3

Abgabe: 05.11.2026, 08:00 (elektronisch)

Aufgabe 1.
Thema: Ableitungen.
Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$
b) $(g \circ h)(z)$, wobei $h(z) = z^3 + 1$ und $g(z) = \frac{1}{z+1}$.

Aufgabe 2.
Thema: Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Zeigen Sie weiter, dass die Folge der Funktionen f_n auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.
[*Hinweis: Betrachten Sie* $f_n(1/n)$.]

Aufgabe 3.
Thema: Konvergenzradius.
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}(2z)^n$
b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n z^n$
c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

Aufgabe 4.
Thema: Rand des Konvergenzkreises.
Betrachten Sie die folgenden Potenzreihen:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

(a) Zeigen Sie (zum Beispiel mit Hilfe des Quotientenkriteriums), dass der Konvergenzradius beider Potenzreihen 1 ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Reihe S_1 an keinem Punkt z mit $|z| = 1$ konvergiert.
(c) Zeigen Sie, dass die Reihe S_2 an jedem Punkt z mit $|z| = 1$ konvergiert.

Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte.