Prof. Dr. Linus Kramer
Lawrence Lo

Wintersemester 2026/27
Universität Münster

Funktionentheorie
Blatt 1

Abgabe: 22.10.2026, 08:00 (elektronisch). Es gibt pro Aufgabe 4 Punkte.

Aufgabe 1.
Thema: Konvergenz in $\mathbb{C}$ versus Konvergenz in $\mathbb{R}$.
Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = x_n + iy_n$ eine komplexe Folge, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen sind. Zeigen Sie, dass die Folge der z_n genau dann gegen $z = x + iy$ konvergiert, mit $x, y \in \mathbb{R}$, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ gilt.

Aufgabe 2.
Thema: Kompaktheit und Häufungspunkte.

a) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert z. Zeigen Sie, dass die Menge $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ kompakt ist.
b) Finden Sie eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, die einen Häufungspunkt z besitzt, so dass die Menge $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ dennoch nicht kompakt.

Warum ist b) kein Widerspruch zu a) oder zur Definition von Kompaktheit?

Aufgabe 3.
Thema: Äquivalente Formulierungen von Stetigkeit

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f : X \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Sei $z \in X$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $w \in X$ mit $|z - w| < \delta$ gilt $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.
(ii) Für jede Folge z_n in X mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ konvergiert die Folge $f(z_n)$ gegen $f(z)$.

Aufgabe 4.
Thema: Verknüpfungen stetiger Funktionen

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

a) Sind $f, g : X \to \mathbb{C}$ stetig, so sind $(f+g)(z) := f(z)+g(z)$ und $(fg)(z) := f(z)g(z)$ stetig. Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in X$, so ist auch $\left(\frac{1}{f}\right)(z) := \frac{1}{f(z)}$ stetig.
b) Sind $f : X \to \mathbb{C}$ und $g : Y \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(X) \subseteq Y$, dann ist auch $(g \circ f)(z) := g(f(z))$ stetig.