# §4 Eigenschaft holomorpher Funktionen

Wir leiten mit den Ergebnissen aus §2 und §3 jetzt wichtige Sätze der Funktionentheorie her.

1. **Lemma** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, sei $c \in \Omega$. Angenommen, $0 = f(c) = f'(c) = \dots = f^{(m)}(c)$ für ein $m \geq 0$. Dann gibt es $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f(z) = (z-c)^{m+1} \cdot g(z)$.

**Beweis** Für $c \neq z$ setze $g(z) = \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}$. Nach §3.12 gilt auf einer Kreisscheibe $B_\varepsilon(c)$, dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k.$$

Nach Voraussetzung ist $a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$

$$\Rightarrow f(z) = (z-c)^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m+1} (z-c)^k$$

Setze also $g(c) = a_{m+1}$ $\Rightarrow$ $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ nach Abels Theorem, denn $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m+1} (z-c)^k$ komplex differenzierbar in $z = c$. $\square$

**Bem** $g$ ist eindeutig durch $f$ bestimmt, denn

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}} \text{ für } z \neq c, \text{ und } g(c) = \lim_n g\left(c + \tfrac{1}{n}\right).$$

2. <u>Satz</u> <u>(Identitätssatz)</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $c \in \Omega$ und sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\Omega$ mit $\lim_n c_n = c$ und $c_n \neq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dann sind äquivalent:

(i) $f = g$

(ii) $f(c_n) = g(c_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(iii) $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$ für alle $k \geq 0$

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) klar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): setze $\varphi(z) = f(z) - g(z) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Weiter ist $\varphi(c) = 0$, weil $\varphi(c) = \lim_n \varphi(c_n) = 0$.

<u>Beh</u>: $\varphi^{(k)}(c) = 0$ für alle $k \geq 0$.

<u>Denn</u>: das stimmt für $k = 0$. Angenommen, es gibt $k > 0$ mit $\varphi^{(k)}(c) \neq 0$. Wähle $m$ <u>minimal</u> mit $\varphi^{(m)}(c) \neq 0$.

Nach §4.1 gibt es $\psi \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit

$$\varphi(z) = (z-c)^m \psi(z), \quad \psi(c) \neq 0$$

Folglich gibt es $\varepsilon > 0$, so, dass $\psi(z) \neq 0$ für (alle) $|z - c| \leq \varepsilon$.

Für $n \gg 0$ ist $|c_n - c| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$$\varphi(c_n) = \underbrace{(c_n - c)^m}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\psi(c_n)}_{\neq 0} \neq 0 \quad \lightning$$

$\square$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Setze $\varphi = f - g$ und $A_n = \{z \in \Omega \mid \varphi^{(n)}(z) = 0\}$. Da $\varphi^{(n)}$ stetig ist, ist $A_n$ abgeschlossen in $\Omega$. Folglich ist auch $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ <u>abgeschlossen in $\Omega$</u>, und $c \in A$. Ist $w \in A$, so folgt aus § 3.12 (Cauchy-Taylor), dass $B_r(w) \subseteq A$ für ein $r > 0$. Also ist $A$ <u>offen in $\Omega$</u>. Sei $w \in \Omega$ beliebig, sei

$\gamma : [a,b] \to \Omega$ stetig, $\gamma(a) = c$, $\gamma(b) = w$. Sei $s = \max\{t \in [a,b] \mid \gamma([0,t]) \subseteq A\}$. Da $A$ abg. ist, folgt $\gamma(s) \in A$. Da $A$ offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $\gamma(t) \in A$ für $|s - t| < \varepsilon$. Es folgt $s = b$, also $\Omega = A$ und damit $\varphi = 0$ $\square$

Der Identitätssatz sagt, dass holomorphe Funktionen durch ihre Werte auf "kleinen" Teilmengen schon eindeutig festgelegt sind.

<u>Korollar</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Seien $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f(t) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt schon $f = g$.

<u>Beweis</u> Sei $c \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$B_\varepsilon(c) \subseteq \Omega \Rightarrow c + t \in \Omega$ für $|t| < \varepsilon$.

Setze $c_n = c + \frac{1}{n} \varepsilon \qquad n = 1, 2, 3, \dots$

$\Rightarrow f(c_n) = g(c_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow f = g$ $\square$

3. Theorem (Satz von Liouville) Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Wenn $f$ beschränkt ist, so ist $f$ konstant.

Beweis Angenommen, $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Für jedes $r > 0$ gilt dann

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot k! \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \, dz \qquad \text{(Cauchy-Taylor)},$$

also $|f^{(k)}(0)| \leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot k! \cdot \frac{M}{r^{k+1}} \cdot \cancel{2\pi} r = k! \cdot M \cdot \frac{1}{r^k}$

Für $r \gg 0$ wird die rechte Seite beliebig klein $\Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \geq 1$ $\Rightarrow f(z) = f(0)$ für alle $z \in \mathbb{C}$

(setze $g(z) = f(0) \Rightarrow f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z)$ für alle $k \geq 0$)

$\square$

4. Satz (Verallgemeinerter Satz von Liouville)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Falls es $m, n, l \in \mathbb{N}$ gibt mit $|f(z)| \le m \cdot |z|^n + l$ für alle $z$, so ist $f$ ein Polynom vom Grad $\le n$, d.h.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad , \; a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}.$$

Beweis Mit Induktion nach $n$.

$\boxed{n=0} \rightsquigarrow$ §4.3 fertig. (v)

Induktionsschritt: $\boxed{n \to n+1.}$ Setze $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(0)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow g$ holomorph auf $\mathbb{C} - \{0\}$, stetig auf $\mathbb{C}$. Nach dem Fortsetzungssatz §3.15 ist $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Weiter gilt für $z \neq 0$

$$|g(z)| \le \frac{|f(z)| + |f(0)|}{|z|} \le \frac{m \cdot |z|^{n+1} + l + |f(0)|}{|z|}$$

$\Rightarrow |g(z)| \le m \cdot |z|^n + l'$ für $|z| \ge 1$

$l' = l + |f(0)|$

Auf der kompakten Menge $\overline{B}_1(0)$ ist $|g(z)|$ beschränkt, also gibt es $l'' \in \mathbb{R}$ mit

$$|g(z)| \le m \cdot |z|^n + l'' \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Nach Induktionsannahme folgt

$$g(z) = b_n z^n + \dots + b_0 \qquad \text{Polynom vom Grad} \le n$$

$$\Rightarrow \quad f(z) - f(0) = b_n z^{n+1} + \dots + z b_0 \qquad \text{für } z \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = b_n z^{n+1} + \dots + z b_0 + f(0) \qquad \text{für } \underline{\text{alle}}\ z \in \mathbb{C},$$

denn $f$ ist stetig. $\square$

#

5. <u>Theorem</u> <u>(Fundamentalsatz der Algebra)</u>

Sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Dann hat $p$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d.h. es gibt $w \in \mathbb{C}$ mit $p(w) = 0$.

<u>Beweis</u> Angenommen, das wäre falsch. Dann ist

$$F(z) = \frac{1}{p(z)} \quad \text{holomorph auf } \mathbb{C}.$$

Nun gilt

$$|p(z)| \geq |a_n| |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k$$

$$\geq |a_n| \cdot |z|^n - |z|^{n-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|}_{=: r} \qquad \text{für } |z| \geq 1$$

$$\geq |a_n| \cdot |z|^n \left( 1 - \frac{r}{|a_n| \cdot |z|} \right) \qquad \text{für } |z| \geq 1$$

Für $|z| \geq 1, \frac{2r}{|a_n|}$ folgt also

$$|p(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n$$ und damit

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|a_n| \cdot |z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|} \quad \text{für} \quad |z| \geq 1, \frac{2r}{|a_n|}.$$

Da $f(z)$ stetig ist, ist $|f(z)|$ beschränkt auf der kompakten Menge $\overline{B}_s(0)$, $s = \max\{1, \frac{2r}{|a_n|}\}$

$$\Rightarrow f \text{ beschränkt} \underset{\text{Liouville}}{\Rightarrow} f = \text{const} \Rightarrow p = \text{const}$$

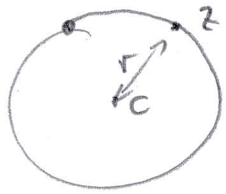
$$p(z) = a_0 \quad ↯ \quad \text{weil} \quad n \geq 1 \qquad \square$$

Ein Körper, in dem jedes nicht-konstante Polynom $p$ eine Nullstelle hat, heißt <u>algebraisch abgeschlossen</u>.

Wir haben also bewiesen: <u>der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.</u>

6. <u>Lemma</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $c \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{B}_r(c) \subseteq \Omega$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ die <u>Mittelwertungleichung</u>

$$|f(c)| \le \max\{\, |f(z)| \mid |z-c| = r \,\}$$



<u>Beweis</u> $f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-c}\, dz$

$$\Rightarrow |f(c)| \le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max\left\{ \frac{|f(z)|}{r} \;\middle|\; |z-c| = r \right\} \quad \square$$

7. <u>Definition</u> Eine Abbildung $\Omega \to \mathbb{C}$ heißt <u>offen</u>, wenn für jede offene Menge $U \subseteq \Omega$ auch $f(U)$ offen ist.

<u>Satz</u> (<u>Satz von der offenen Abbildung</u>)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ nicht konstant. Dann ist $f$ eine offene Abbildung.

<u>Beweis</u> Sei $c \in \Omega$, sei $r > 0$ mit $B_r(c) \subseteq \Omega$.

<u>Beh:</u> <u>es gibt $s > 0$ so, dass $B_s(f(c)) \subseteq f(B_r(c))$</u>

Beweis der Behauptung in 2 Schritten.

Schritt 1: Es gibt $t$ mit $0 < t < r$ so, dass $f(z) \neq f(c)$ für alle $z$ mit $|z-c| = t$.

Denn: Wäre das falsch, so gäbe es für jedes $m = 1, 2, 3, \ldots$ ein $z_m$ mit $|z_m - c| = \frac{r}{m}$ mit $f(z_m) = f(c)$. Mit dem Identitätssatz §4.2 folgt $f = \text{const}$ ↯ $\square$

Schritt 2: Sei $s = \frac{1}{2} \cdot \min \{ |f(z) - f(c)| \mid |z-c| = t \}$

Dann ist $s > 0$ und $B_s(f(c)) \subseteq f(B_r(c))$.

Denn: nach Schritt 1 ist $s > 0$. Wäre die Beh. falsch, so gäbe es $w \in B_s(f(c)) - f(B_r(c))$.

Betrachte $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w}$ auf $B_r(c)$

$\Rightarrow$ $g$ holomorph auf $B_r(c)$, für $|z-c| = t$ gilt
$$|f(z) - w| \geq \underbrace{|f(z) - f(c)|}_{\substack{\geq 2 \cdot s \\ \text{(nach Definition von } s)}} - \underbrace{|f(c) - w|}_{< s} > s$$

§4.6 $\Rightarrow$
$$\frac{1}{|f(c) - w|} \leq \max \left\{ \underbrace{\frac{1}{|f(z) - w|}}_{< \frac{1}{s}} \;\middle|\; |z-c| = r \right\} < \frac{1}{s}$$

$\Rightarrow |f(c) - w| > s$ ↯ $\square$

**Korollar** (Satz von der Gebietsinvarianz)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ nicht konstant. Dann ist $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

*Beweis* Nach § 4.7 ist $f(\Omega)$ offen, $f(\Omega) \neq \emptyset$ (weil $\Omega \neq \emptyset$) und $f(\Omega)$ ist wegzush. nach § 1.5 $\square$

**Korollar** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dann sind äquivalent:

(i) $f$ ist konstant

(ii) $z \longmapsto |f(z)|$ ist konstant

(iii) $z \longmapsto \operatorname{Re}(f(z))$ ist konstant

(iv) $z \longmapsto \operatorname{Im}(f(z))$ ist konstant

*Beweis* Jede der vier Bedingungen impliziert, dass $f(\Omega)$ kein Gebiet ist. $\square$

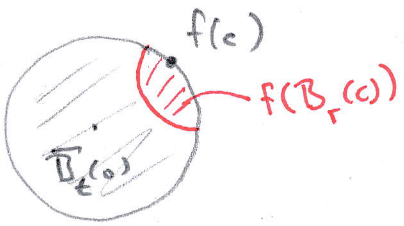
8. <u>Theorem</u> (<u>Maximumprinzip</u>)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Falls $|f|$ in einem Punkt $c \in \Omega$ ein lokales Maximum hat, so ist $f$ konstant.

⌈ $f$ nicht konstant $\Rightarrow$ $|f|$ hat keine lokalen Maxima in $\Omega$ ⌋

<u>Beweis</u> Wähle $r > 0$ so, dass $|f(z)| \leq |f(c)|$ für alle $z \in B_r(c)$. Also

$$f(B_r(c)) \subseteq \{ w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq \underbrace{|f(c)|}_{=: t} \} = \overline{B}_t(0)$$




Das Bild von $f(B_r(c))$ ist also <u>nicht</u> offen, denn für kein $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(f(c)) \subseteq f(B_r(c)) \subseteq \overline{B}_t(0)$ □

Nach § 4.7 ist $f$ konstant.

<u>Korollar</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein <u>beschränktes</u> Gebiet (d.h. es gibt $R > 0$ mit $\Omega \subseteq \overline{B}_R(0)$), sei $f: \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig, sei $f$ holomorph auf $\Omega$. Wenn $f$ nicht konstant ist, so liegen alle Maxima von $|f|$ in $\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$.

(Beachte: $\overline{\Omega}$ ist abg + beschränkt, also kompakt $\Rightarrow$ $|f|$ hat Maxima auf $\overline{\Omega}$.)

**Beweis** Nach §4.8 liegt in $\Omega$ kein Maxima von $|f|$, also liegt die (notwendig existierenden) Extrema in $\partial\Omega$ $\square$

#

9. **Satz** (Schwarzsches Lemma)

Sei $\Omega = B_1(0)$, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f(\Omega) \subseteq \Omega$ und $f(0) = 0$.

Dann gilt entweder $f(z) = az$ für ein $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$, oder es gilt $|f'(0)| < 1$ sowie $|f(z)| < |z|$ für alle $z \in \Omega - \{0\}$.

**Beweis** Wir setzen
$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$
dann ist $g$ holomorph nach dem Fortsetzungssatz §3.15.

Für $0 < r < 1$ und $|w| = r$ gilt
$|g(w)| = \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}$, nach §4.8 folgt $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ für alle $z$ mit $|z| \leq r$. Dies gilt für alle $0 < r < 1$, also $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \Omega$, damit

$$|f(z)| \leq |z| \cdot |g(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |f'(0)| = |g(0)| \leq 1 .$$

Ist $|f'(0)| = |g(0)| = 1$, so ist $g = \text{const}$ nach § 4.8 $\Rightarrow f(z) = az$ für ein $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$.

Ist $|f(w)| = |w|$ für ein $w \in \Omega$, so folgt $|g(w)| = 1 \Rightarrow g = \text{const} \Rightarrow f(z) = az$, $|a| = 1$ $\square$

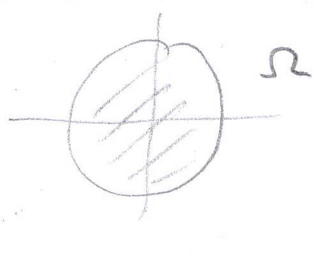
10. <u>Def</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ heißt <u>Automorphismus von $\Omega$</u>, wenn es eine holomorphe Abbildung $g : \Omega \to \Omega$ gibt mit $f \circ g = id_\Omega$ und $g \circ f = id_\Omega$

Dann ist $g$ die <u>Inverse</u> von $f$.

<u>Bsp</u> $Id_\Omega : z \mapsto z$ ist ein Automorphismus von $\Omega$, mit Inversem $Id_\Omega$.

Die Automorphismen von $\Omega$ bilden bezüglich der Verknüpfung $\circ$ (= Hintereinanderausführung) eine <u>Gruppe</u>, die <u>Automorphismengruppe</u> $\mathrm{Aut}(\Omega)$ von $\Omega$.

Wir bestimmen nun die Automorphismengruppe von $\Omega = B_1(0)$.



11. <u>Konstruktion</u> Sei $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Wir definieren $f_{a,b}(z) = \dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$

<u>Behauptung</u> Dann gilt $f_{a,b} \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ für $\Omega = B_1(0)$.

<u>Denn:</u> (i) Für $|z| < 1$ ist $\bar{b}z + \bar{a} \neq 0$,

weil $|\bar{b}z| = |\bar{a}| \Rightarrow |b|^2|z|^2 = 1 + |b|^2 \Rightarrow |z| \geq 1$,

also ist $f_{a,b} \in \mathcal{O}(\Omega)$

(ii) $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| < 1 \Leftrightarrow |az+b|^2 < |\bar{b}z+\bar{a}|^2$

$\Leftrightarrow |a|^2|z|^2 + |b|^2 + \cancel{az\bar{b}} + \cancel{\bar{a}\bar{z}b} < |\bar{b}|^2|z|^2 + |\bar{a}|^2 + \cancel{\bar{b}za} + \cancel{b\bar{z}\bar{a}}$

$\Leftrightarrow (|a|^2 - |b|^2)|z|^2 < |a|^2 - |b|^2 \Leftrightarrow |z| < 1$

also gilt $f_{a,b}(\Omega) \subseteq \Omega$

(iii) $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac+b\bar{d},\, ad+b\bar{c}}$, denn

$$f_{a,b}\left(\frac{cz+d}{\bar{d}z+\bar{c}}\right) = \frac{a\frac{cz+d}{\bar{d}z+\bar{c}} + b}{\bar{b}\frac{cz+d}{\bar{d}z+\bar{c}} + \bar{a}} = \frac{acz + ad + b\bar{d}z + b\bar{c}}{\bar{b}cz + \bar{b}d + \bar{a}\bar{d}z + \bar{a}\bar{c}}$$

$$= \frac{(ac+b\bar{d})z + (ad+b\bar{c})}{(\bar{a}\bar{d}+\bar{b}c)z + (\bar{a}\bar{c}+\bar{b}d)}$$

(iv) Insgesamt ist $f_{\bar{a},-b}$ die Inverse zu $f_{a,b}$

und $f_{1,0} = \mathrm{id}_\Omega$

(v) $G = \{ f_{a,b} \mid a,b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \}$ ist eine Gruppe und ein Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

Denn: nach (iv) gilt:

$f_{a,b}, f_{c,d} \in G \Rightarrow f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G$

$\mathrm{id}_\Omega \in G$, und jedes $f_{a,b} \in G$ hat ein Inverses

$f_{\bar{a},-b} \in G$.

(vi) Wir setzen $H = \{ f_{a,0} \mid a \in \mathbb{C},\ |a|^2 = 1 \}$

Dann gilt: $H = \{ f \in \mathrm{Aut}(\Omega) \mid f(0) = 0 \}$

Denn: "$\subseteq$": $f_{a,0}(z) = \overset{a^2}{a} z \Rightarrow f_{a,0}(0) = 0$

"$\supseteq$": $f \in \mathrm{Aut}(\Omega),\ f(0) = 0 \overset{\substack{\text{Schwarz} \\ \text{Lemma §4.5}}}{\Longrightarrow} f(z) = a z$

für ein $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ (v) oder

$|f'(0)| < 1$. Aber dann hat $f$ ein Inverses $g \in \mathrm{Aut}(\Omega)$

mit $f \circ g = \mathrm{id}_\Omega$, $g(0) = 0 \Rightarrow \underbrace{|f'(0)|}_{<1} \cdot \underbrace{|g'(0)|}_{>1} = 1$

$\lightning$.

Also $f(z) = a z$, $|a| = 1$

(vii) Zu jedem $c \in \Omega$ gibt es $F_{a,b} \in G$ mit $F_{a,b}(0) = c$.

Beweis Setze $r = \sqrt{\frac{1}{1-|c|^2}}$, $a = ir$, $b = -ca$.

Es folgt $a\bar{a} - b\bar{b} = r^2 - |c|^2 r^2 = r^2(1-|c|^2) = 1$

sowie $F_{a,b}(0) = \frac{b}{\bar{a}} = -c\frac{a}{\bar{a}} = c$

12. Theorem Sei $\Omega = B_1(0)$. Dann gilt

$$\mathrm{Aut}(\Omega) = \{ F_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \}$$

wobei $F_{a,b}(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$

Ist $u, v \in \Omega$, so gibt es ein $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ mit $f(u) = v$.

Beweis Wir wissen schon, dass jedes $F_{a,b}$ ein Automorphismus von $\Omega$ ist. Sei nun $F \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ beliebig, setze $c = F(0)$. Dann gibt es $F_{a,b}$ mit $F_{a,b}(0) = c$, also gilt für $g = F_{\bar{a},-b} \circ F$, dass

$g(0) = 0 \Rightarrow g = F_{d,0}$ für ein $d \in \mathbb{C}$, $|d| = 1$

$\Rightarrow F = F_{a,b} \circ F_{d,0} = F_{ad, b\bar{d}}$

$\Rightarrow \mathrm{Aut}(\Omega) = \{ f_{a,b} \mid a,b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \}$

Für $u, v \in \Omega$ wähle $g, h \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ mit $g(0) = u$, $h(0) = v \Rightarrow h \circ g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ und $(h \circ g^{-1})(u) = v$ $\square$

Theorem §4.12 mag speziell klingen. Es gilt aber der Riemannsche Abbildungssatz: ist $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ ein sternförmiges (allgemeiner: ein einfach zusammenhängendes) Gebiet, so gibt es eine biholomorphe Abbildung $f: B_1(0) \to \Omega$ [d.h. $f$ ist bijektiv und holomorph und $f^{-1}$ ist auch holomorph]

Damit folgt, dass die Gruppen $\mathrm{Aut}(\Omega)$ und $\mathrm{Aut}(B_1(0))$ isomorph sind.