

§ 3 Cauchy's Integralsatz

148

Erinn. an Analysis I, II.

(a) Ist $F: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar, mit Ableite

$$F' = f, \text{ so gilt } \int_r^s f(t) dt = F(s) - F(r)$$

für $r, s \in (a,b)$ (wie vgl. $s < r \dots$) (H.S. der Differential- und Integralrechnung)

(b) Ist $\gamma: (\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ stetig diff'bar, so gilt

$$\text{für } r, s \in (\tilde{a}, \tilde{b})$$

$$\int_r^s f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = F(\gamma(s)) - F(\gamma(r))$$

(Kettenregel)

(c) Wir say, $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig diff'bar, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt u. ein Fortsetz. $F: (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, die stetig diff'bar ist.

(d) Eine Kurve $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt stetig diff'bar,

wenn $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_k(t))$ mit γ_j stetig diff'bar, $j = 1, \dots, k$. Wir schreiben die Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\gamma}(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_k'(t))$$

In $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ schreiben $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$

$$\gamma_1 = \operatorname{Re}(\gamma) \quad \gamma_2 = \operatorname{Im}(\gamma)$$

(e) Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig, so definiere

$$\text{wir } \int_a^b \gamma(t) dt = \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \int_a^b \gamma_2(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_k(t) dt \right)$$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_k(t))$$

(f) Sind $\gamma, \tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig, so gilt

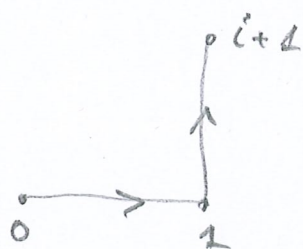
$$\int_a^b (\gamma(t) + \tilde{\gamma}(t)) dt = \int_a^b \gamma(t) dt + \int_a^b \tilde{\gamma}(t) dt$$

Ist $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung, so gilt

$$\int_a^b A(\gamma(t)) dt = A \left(\int_a^b \gamma(t) dt \right)$$

1. Def Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stückweise
stetig diff'bare Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ ist
 eine stetige Abbildung γ , für die es eine
 Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$ gibt so,
 dass γ auf jedem Teilintervall $[a_{j-1}, a_j]$ stetig
 diff'bar ist. In den Punkten $a_1, \dots, a_m$ kann
 γ also "Knicke haben".

z.B. $\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + i(t-1) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$



Ist $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so definieren wir
 das komplex Wertintegral

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \sum_{n=1}^m \int_{a_{n-1}}^{a_n} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Für jedes Teilintervall $[a_{n-1}, a_n]$ wird also
 die stetige Funktion $t \mapsto F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ integriert.

Beachte den Term $\dot{\gamma}(t)$! Wir werden sich sehen,
 warum es "hört" ist.

2. Satz Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei

$\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ Stückweise stetig diff'bar, sei

$F \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit (stetig) Ableitung $F = F'$.

Dann gilt $\int_{\gamma} F(z) dz = \underbrace{F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}_{\text{unabhängig von } \gamma!}.$

Beweis Wir betrachten zuerst den Fall, dass γ stetig diff'bar ist. Dann ist $c(t) = F(\gamma(t))$ stetig diff'bar, mit Ableitung $\dot{c}(t) = F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ (weil $h \mapsto F(p)$ die totale Ableitung von F im Punkt p ist).

Es folgt $\int_{t=a}^b \dot{c}(t) dt = c(b) - c(a).$

Ist $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$ Unterteilung von $[a, b]$ so, dass γ auf jedem $[a_j, a_{j-1}]$ diff'bar ist, so folgt

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \sum_{j=1}^m (F(\gamma(a_j)) - F(\gamma(a_{j-1}))) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

□

[5]

3. Beispiel (a) $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$ $r > 0$, $t \in [0, 2\pi]$
 $\dot{\gamma}(t) = i r e^{it}$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cdot e^{-it} \cdot r \cdot i \cdot e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Folger Auf dem Gebiet $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ gibt es
keine holomorphe Funktion F mit $F'(z) = \frac{1}{z}$.

Denn sonst wäre $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$.

(b) $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$ $r > 0$ $n \in \mathbb{Z}$
 $\dot{\gamma}(t) = r \cdot i e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} r i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} r^{n+1} \cdot i e^{i(n+1)t} dt$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ r^{n+1} \cdot i \left[\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

(c) $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$ $r > 0$ $n \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} \bar{z}^n dz = \int_0^{2\pi} r^{n+1} \cdot i e^{i(1-n)t} dt = \begin{cases} r^2 2\pi i & n = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

#

Bem let $|z| = r$, so $\bar{z} = \frac{r^2}{z} = r^2 z^{-1}$,

also let $\int_{\gamma} \bar{z}^n dz = \int_{\gamma} r^{2n} z^{-n} dz = r^{2n} \int_{\gamma} z^{-n} dz$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ r^2 2\pi i & n = 1 \end{cases}$$

4. Nützliche Rechenregeln

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet,

sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ stückweise stetig diff'bar,

se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

(i) Ist $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so gilt

$$\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$$

(ii) Ist $c \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\int_{\gamma} c \cdot f(z) dz = c \cdot \int_{\gamma} f(z) dz$$

(iii) Set $L = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$, $M = \max \{ |f(\gamma(t))| \mid t \in [a, b] \}$

Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt \leq M \cdot L$$

Die Regel (i), (ii) folgt direkt aus dem Rechenweg für
Integral aus Analysis I (betrachte Real- und
Imaginärteil)

Zu (iii): Angenommen, $\int_{\gamma} f(z) dz$ ist reell. Dann
gilt
und γ stetig diff'bar

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (F(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)) dt$$

A. A. I

$$\leq \int_a^b |\operatorname{Re} (F(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t))| dt \leq \int_a^b |F(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt$$

$$\leq \int_a^b M \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt = M \cdot L, \text{ es folgt}$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |F(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt \leq M \cdot L.$$

Das gilt dann auch für stückweise stetig diffbar γ .

Im allg. gibt es $c \in \mathbb{C}$, $|c|=1$ mit

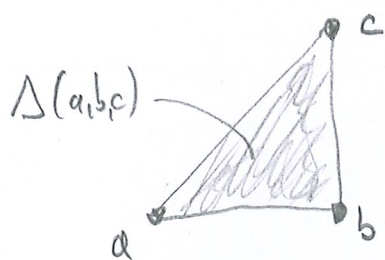
$$c \int_{\gamma} F(z) dz \in \mathbb{R} \quad \text{und die Behauptung folgt.}$$

$$\underbrace{\int_{\gamma}}_{\gamma} = \int_{\gamma} c \cdot f(z) dz$$



5. Def Für $a, b, c \in \mathbb{C}$ ist die Dreiecksfläche

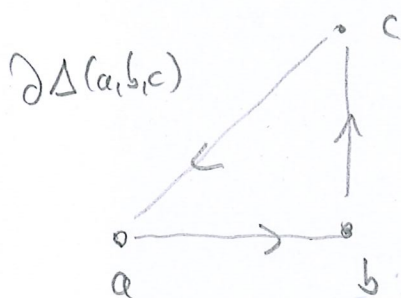
$$\Delta(a, b, c) = \{ ra + sb + tc \mid 0 \leq r, s, t \leq 1, r+s+t=1 \} \subseteq \mathbb{C}$$



Der zyklische Konturweg $\partial\Delta(a, b, c)$ ist

$$\partial\Delta(a, b, c) : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\partial\Delta(a, b, c)(t) = \begin{cases} (1-t)a + tb & 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t)b + (t-1)c & 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t)c + (t-2)a & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$



6. Lemma (Integrallemma von Goursat)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Ist $a, b, c \in \Omega$ mit $\Delta(a, b, c) \subseteq \Omega$, so gilt

$$\int_{\partial\Delta(a, b, c)} f(z) dz = 0$$

$\partial\Delta(a, b, c)$

Demo durch eine iterative Schachtelung von
Dreiecken.

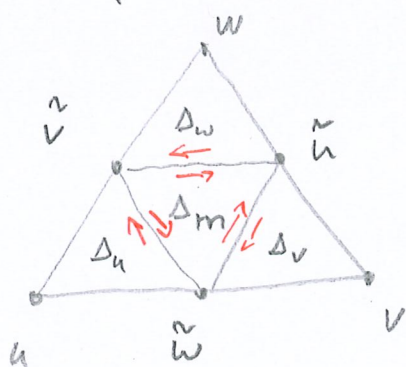
55

Voraussetz. Sind $u, v, w \in \Omega$ mit $\frac{\Delta(u, v, w)}{= \Delta} \in \Omega$,

so setze
$$h(\Delta) = \int_{\partial \Delta} f(z) dz$$

$$l(\Delta) = L(\partial \Delta) = |v-u| + |w-v| + |u-w|$$

Betrachte jetzt die Seite mittel punkte



$\rightarrow$ vier Dreieck $\Delta_u, \Delta_v, \Delta_w, \Delta_m$
mit gleicher Umlauf. Es gilt

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \int_{\partial \Delta_u} f(z) dz + \int_{\partial \Delta_v} f(z) dz + \int_{\partial \Delta_w} f(z) dz + \int_{\partial \Delta_m} f(z) dz,$$

weil sich die Anteile längs der Seiten $\tilde{w}\tilde{u}$, $\tilde{u}\tilde{v}$, $\tilde{v}\tilde{w}$
wegheben. Wähle nun $x \in u, v, w, m$ so, dass

$$|h(\Delta_x)| \geq |h(\Delta_u)|, |h(\Delta_v)|, |h(\Delta_w)|, |h(\Delta_m)|$$

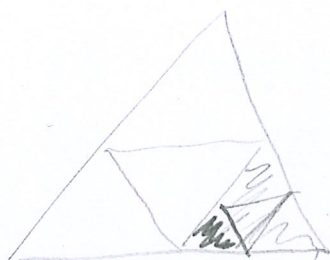
gilt. Es folgt $4 \cdot |h(\Delta_x)| \geq |h(\Delta)|$

$$l(\Delta_x) = \frac{1}{2} l(\Delta)$$

Jetzt Iteration, $\Delta(0) = \Delta(a, b, c) = \Delta_{usw}$
 $\Delta(1) = \Delta(0)_x$

$$\Rightarrow l(\Delta(k)) = 2^{-k} \cdot l(\Delta(0))$$

$$|h(\Delta(0))| \leq 4^k \cdot |h(\Delta(k))| \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Beh: es gibt $w \in \Delta(0)$ mit $\bigcap_{k=0}^{\infty} \Delta(k) = \{w\}$

Existenz: die $\Delta(k)$ bilden eine absteigend Kette kompakter

Mengen $\Rightarrow$ der Durchschnitt ist nicht leer (wähle $w_k \in \Delta(k)$)

$\Rightarrow$ die w_k bilden eine Cauchy-Folge mit Grenzwert w ,
 da jedes $\Delta(k)$ ab. ist, gilt $w \in \Delta(k)$ für alle k)

Eindeutigkeit: die Durchmesser der $\Delta(k)$ werden beliebig
 klein, also kann der Durchschnitt kein zwei
 verschiedene Punkte enthalten. $\square$

Jetzt verwenden wir, dass f holomorph ist.

$$\begin{aligned} \text{Schreibe } f(z) &= f(w) + \Theta(z-w)(z-w) \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{f(w)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stammfunktion}}}{f'(w)}(z-w) + \underbrace{(\Theta(z-w) - \Theta(0))(z-w)}_{\substack{= \alpha(z-w) \text{ stetig} \\ \alpha(0) = 0}} \end{aligned}$$

Stammfunktion

$$\frac{f'(w)}{2}(z-w)^2$$

Es folgt mit § 3.2, dass

57

$$h(\Delta(h)) = \int_{\partial \Delta(h)} F(z) dz = \int_{\partial \Delta(h)} \alpha(z-w)(z-w) dz$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |h(\Delta(h))| &\leq l(\Delta(h)) \cdot \max \{ |\alpha(z-w)(z-w)| \mid z \in \partial \Delta(h) \} \\ &\leq l(\Delta(h))^2 \cdot \max \{ |\alpha(z-w)| \mid z \in \partial \Delta(h) \} \\ &= 2^{-2h} l(\Delta(0))^2 \cdot \max \{ |\alpha(z-w)| \mid z \in \partial \Delta(h) \} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |h(\Delta(0))| \leq \underbrace{4^h \cdot 2^{-2h}}_{=1} l(\Delta(0))^2 \cdot \max \{ |\alpha(z-w)| \mid z \in \partial \Delta(h) \}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für

alle v mit $|v| \leq \delta$ gilt $|\alpha(v)| \leq \varepsilon$, weil α

stetig mit $\alpha(0) = 0$. Ist $h \gg 0$, so ist $\Delta(h) \subseteq B_\delta(w)$

$\Rightarrow |\alpha(z-w)| \leq \varepsilon$ für alle $z \in \partial \Delta(h)$.

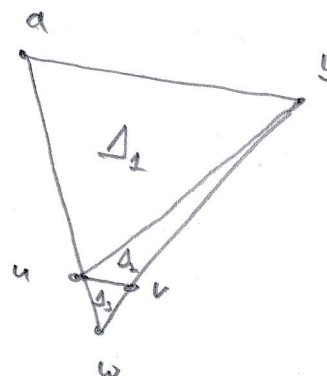
Es folgt $|h(\Delta(0))| \leq 0$



Korollar Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $w \in \Omega$.
 Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Wenn f in jedem Punkt $z \neq w$
 holomorph ist, so gilt für jedes Dreieck $\Delta = \Delta(a, b, w) \subseteq \Omega$

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

Beiw. Betrachtet die Zerlegung



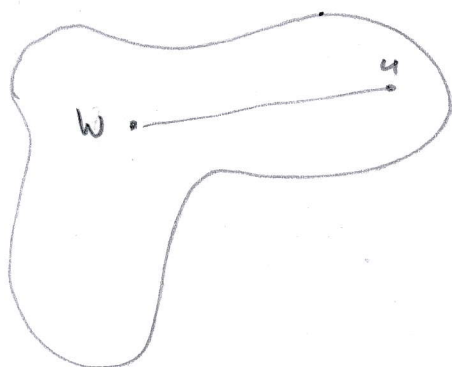
$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \underbrace{\int_{\partial \Delta_1} f(z) dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial \Delta_2} f(z) dz}_{=0} + \int_{\partial \Delta_3} f(z) dz$$

$$\text{mit } \left| \int_{\partial \Delta_3} f(z) dz \right| \leq L(\partial \Delta_3) \cdot \max \{ |f(z)| \mid z \in \partial \Delta_3 \}$$

$$\leq \underbrace{(|u-v| + |v-w| + |w-u|)}_{\text{beliebig klein für } u, v \text{ nahe bei } w} \cdot \underbrace{\max \{ |f(z)| \mid z \in \Delta \}}_{\text{konstant}}$$

□

7. Def. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt sternförmig, wenn
 es $w \in X$ gibt so, dass für jedes $u \in X$ die Strecke
 $[w, u] = \{ (1-\alpha)w + \alpha u \mid 0 \leq \alpha \leq 1 \}$ ganz in X liegt.



Man sagt auch, X ist sternförmig hinsichtlich w .

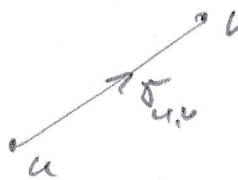
8. Theorem (Cauchy's Integralsatz für Sternförmige Gebiete) 159

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei Ω sternförmig bzgl. $w \in \Omega$. Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, sei f holomorph auf $\Omega \setminus \{w\}$. Dann gibt es $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $F' = f$, d.h. F hat eine Stammfunktion F auf Ω .

Ist also $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ stückweise stetig diff'bar, so gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Beweis Für $u, v \in \mathbb{C}$ und $t \in [0, 1]$ setze $\gamma_{u,v}(t) = (1-t)u + tv$.

Wir definieren $F(u) = \int_{\gamma_{w,u}} f(z) dz$ für $u \in \Omega$.



Behau zu jeder $u \in \Omega$ gibt es $\delta > 0$ so, dass $u+h \in \Omega$ für alle $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| \leq \delta$. Für solche h gilt dann $F(u+h) - F(u) = \int_{\gamma_{u,u+h}} f(z) dz$,

denn $0 = \int_{\gamma_{w,u}} f(z) dz + \int_{\gamma_{u,u+h}} f(z) dz + \int_{\gamma_{u+h,w}} f(z) dz$ nach § 3.6.

Beh b F ist stetig

$$F(u+h) - F(u) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \S 3.6}}{=} \int_0^1 F(u+th) \cdot h \, dt = h \cdot \int_0^1 f(u+th) \, dt$$

$$\Rightarrow |F(u+h) - F(u)| \leq h \cdot M, \quad M = \max\{|f(u+\tilde{h})| \mid |\tilde{h}| \leq \varepsilon_u\}$$

für $|h| \leq \varepsilon_u$.Beh c F ist holomorph

$$\frac{F(u+h) - F(u)}{h} = \int_0^1 f(u+th) \, dt$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(u+h) - F(u)}{h} - f(u) \right| = \left| \int_0^1 (f(u+th) - f(u)) \, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |f(u+th) - f(u)| \, dt \leq \varepsilon \quad \text{wenn } \delta \text{ so gewählt ist, dass}$$

$$|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon \quad \text{für } |u-v| \leq \delta \quad \text{und } |h| \leq \delta.$$

$$\text{Also ist } \Theta(h) = \begin{cases} \frac{F(u+h) - F(u)}{h} & h \neq 0 \\ f(u) & h = 0 \end{cases} \quad \text{stetig.}$$



9. Definition Sei $c \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Wir

[6]

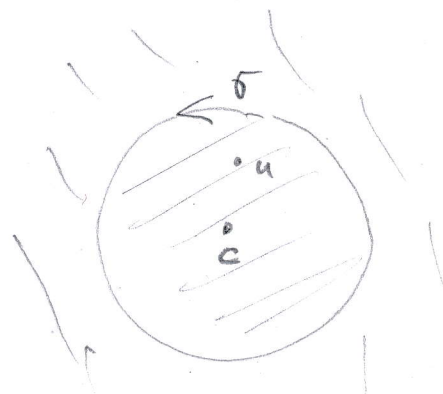
definieren

$$\int_{|z-c|=r} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

Für den Weg $\gamma(t) = c + r \exp(it)$ $t \in [0, 2\pi]$

Lemma Sei $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, sei $u \in \mathbb{C}$ mit $|z-u| \neq r$. Dann gilt

$$\int_{|z-c|=r} \frac{1}{z-u} dz = \begin{cases} 0 & |c-u| > r \\ 2\pi i & |c-u| < r \end{cases}$$



Bew. Fall (a): $|c-u| < r$.

Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{u-c}{z-c} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{u-c}{z-c}} = \frac{z-c}{z-u}$ für $|u-c| < |z-c|$

also $\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z-c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{u-c}{z-c} \right)^k$. Für $\lambda = \frac{|u-c|}{r} < 1$ gilt

denn $\int_{|z-c|=r} \frac{1}{z-u} dz = \int_{|z-c|=r} \frac{1}{z-c} \sum_{k=0}^m \left(\frac{u-c}{z-c} \right)^k dz + \int_{|z-c|=r} \frac{1}{z-c} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{u-c}{z-c} \right)^k dz$

$$\uparrow \quad = 2\pi i + \int_{|z-c|=r} \frac{1}{z-c} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{u-c}{z-c}\right)^k dz \quad \text{für } \varepsilon > 0.$$

§3.3

Wähle nun $m \gg 0$ so, dass $\sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda^k \leq \varepsilon$ gilt,

$$\text{Es folgt } \left| \int_{|z-c|=r} \frac{1}{z-c} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{u-c}{z-c}\right)^k dz \right| \leq \frac{1}{r} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi r = 2\pi \varepsilon$$

$$\text{also } \int_{|z-c|=r} \frac{1}{z-u} dz = 2\pi i$$

Fall b $|c-u| > r$ ähnlich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{u-c}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z-c}{u-c}} = \frac{u-c}{u-z} \quad \text{für } |z-c| < |u-c|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-u} = \frac{1}{c-u} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{u-c}\right)^k$$

$$\int_{|z-c|=r} \frac{1}{z-u} dz = \underbrace{\int_{|z-c|=r} \frac{1}{c-u} \sum_{k=0}^m \left(\frac{z-c}{u-c}\right)^k dz}_{=0 \text{ nach §3.3}} + \underbrace{\int_{|z-c|=r} \frac{1}{c-u} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{z-c}{u-c}\right)^k dz}_{=0 \text{ wie oben } (*)}$$



$$(*) \quad \lambda = \frac{r}{|u-c|} < 1 \quad \left| \int_{|z-c|=r} \frac{1}{c-u} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{z-c}{u-c}\right)^k dz \right| \leq \frac{1}{r} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi r = 2\pi \varepsilon$$

$$\text{falls } \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda^k \leq \varepsilon$$

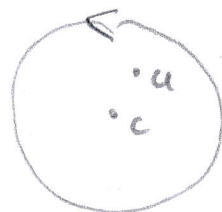
10. Theorem (Cauchy's Integral Formel auf Kreisscheiben)

Sei $R > 0$ und sei $\Omega = B_R(c)$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, sei $0 < r < R$. Dann gilt für

alle $u \in \Omega$ mit $|u - c| < r$ die Formel

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-u} dz$$



d.h. der Wert von $f(u)$ hängt nur von dem Verhalten von f auf dem Kreis $|z-c|=r$ ab!

Bew. Wir definieren eine Hilfsfunktion

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(u)}{z - u} & u \neq z \\ f'(u) & u = z \end{cases}$$

Dann ist g stetig, und g ist holomorph auf $\Omega - \{u\}$.

Folglich gilt mit § 3.8

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|z-c|=r} g(z) dz = \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-u} dz - \underbrace{\int_{|z-c|=r} \frac{f(u)}{z-u} dz}_{= 2\pi i f(u)} \end{aligned}$$



11. Satz (Das Entwicklungsschema)

64

Sei $c \in \mathbb{C}$ und sei $r > 0$. Setz $K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c|=r\}$

Kreislinie mit Radius r um c . Sei $\varphi: K_r \rightarrow \mathbb{C}$

eine stetige Funktion. Für $w \in B_r(c)$ (also $|z-c| < r$)

definieren
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{\varphi(z)}{z-w} dz$$

Dann ist f holomorph auf $\Omega = B_r(c)$ und es gilt

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (w-c)^k, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{\varphi(z)}{(z-c)^{k+1}} dz$$

Bew. Wenn $|z-c|=r > |w-c|$, dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-c}{z-c} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{w-c}{z-c}} = \frac{z-c}{z-c-w+c} = \frac{z-c}{z-w},$$

also
$$\frac{\varphi(z)}{z-w} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(z) \cdot \frac{(w-c)^k}{(z-c)^{k+1}}$$

Setze $\varphi_n(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-c)^{n+1}} \Rightarrow \frac{\varphi(z)}{z-w} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z) \cdot (w-c)^k$

Wirklich
$$|\varphi_n(z)| = \frac{|\varphi(z)|}{r^{n+1}}$$

$$\Rightarrow |\varphi_k(z) \cdot (w-c)^k| = \frac{|\varphi(z)|}{r^{k+1}} |w-c|^k$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|w-c|^k}{r^{k+1}}$.

65

Sei $M = \max \{ |\varphi_k(z)| \mid z \in K_r \}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $m \geq 0$ so, dass $\sum_{k=m}^{\infty} M \cdot \frac{|w-c|^k}{r^{k+1}} < \varepsilon$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z) (w-c)^k dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \sum_{k=0}^m \varphi_k(z) (w-c)^k dz + \underbrace{\int_{|z-c|=r} \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k(z) (w-c)^k dz}_{\text{Betrag} \leq \varepsilon} \\ &= \sum_{k=0}^m (w-c)^k a_k + \underbrace{\int_{|z-c|=r} \sum_{k=m+1}^{\infty} \varphi_k(z) (w-c)^k dz}_{\text{Betrag} \leq \varepsilon} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (w-c)^k \cdot a_k.$$

Nach Ahlf's Theorem § 2.11 ist f holomorph auf

$$\Omega = B_r(c).$$

□

12. Theorem (Entwicklungsatz von Cauchy-Taylor) LG6

Sei Ω ein Gebiet, sei $c \in \Omega$ und sei $r > 0$ so,
dass $\overline{B}_r(c) \subseteq \Omega$ gilt. Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dann gilt für alle $w \in B_r(c)$

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (w-c)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} dz$$

Insbesondere ist f beliebig oft komplex diff'bar in jeden
Punkt $c \in \Omega$.

Beweis Nach Cauchys Integralformel gilt für $w \in B_r(c)$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Setze nun $\varphi(z) = f(z)$ für $z \in K_r$ und
wenne das Entwicklungsschema an.

Wobei ist $f'(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} (w-c)^k$ nach direkter Satz $\Rightarrow$

$a_1 = f'(c)$, dann weiter mit Induktion.



Der folgend Satz fasst einiges zusammen.

67

13. Theorem Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

stetig. Dann sind äquivalent:

(i) f ist holomorph auf Ω , d.h. $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

(ii) f ist in jedem Punkt $c \in \Omega$ beliebig oft komplex diff'bar.

(iii) für jedes $c \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{B}_r(c) \subseteq \Omega$ gilt für alle $w \in B_r(c)$

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (w-c)^k, \quad \text{mit}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} dz$$

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii) } nach § 3.12. (ii) $\Rightarrow$ (i) klar
(i) $\Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (i) mit Albers Theorem § 2.11.



Beachte: für reell diff'bar Funktionen gibt es

keinen vergleichbaren Satz (Ü4!)

14. Satz (Satz von Morera für sternförmige Gebiete)

168

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sternförmig bzgl. $c \in \Omega$.

2. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Falls für jeden stückweise stetig diff'bar Weg $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, so ist f holomorph auf Ω .

Beweis Für $w \in \Omega$ definieren wir wie in § 3.8

$\gamma_{u,v}(t) = (1-t)u + tv$, $t \in [0,1]$. Wir definieren

$F(w) = \int_{\gamma_{c,w}} f(z) dz$. Dann gilt für kleines $h \in \mathbb{C}$

$F(w+h) - F(w) = \int_{\gamma_{w,w+h}} f(z) dz$, weil

$$0 = \underbrace{\int_{\gamma_{c,w}} f(z) dz}_{= F(w)} + \int_{\gamma_{w,w+h}} f(z) dz + \underbrace{\int_{\gamma_{w+h,c}} f(z) dz}_{= -F(w+h)}$$

Setzt weiter wie im Beweis von § 3.8:

F ist stetig in w , weil

$$|F(w+h) - F(w)| \leq |h| \cdot \int_0^1 |f(w+th)| dt$$

Wird id F holomorph in w , denn

69

$$\left| \frac{F(w+h) - F(w)}{h} - f(w) \right| \leq \int_0^1 |F(w+th) - f(w)| dt \leq \varepsilon,$$

ben $\delta > 0$ so gewählt ist, dass $|f(w) - f(w+h)| \leq \varepsilon$ für $|h| < \delta$. Also F holomorph mit $F' = f$.

Nach § 3.13 (i) ist auch f holomorph. $\square$

69½ $\rightarrow$

15. Theorem (Fortsetzungssatz) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, #

sei $c \in \Omega$, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega - \{c\})$. Falls es ein $r > 0$, $M \geq 0$ gibt so, dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \Omega - \{c\}$ mit $|z - c| \leq r$, so hat f eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$, d.h.
 $\tilde{f}(z) = f(z)$ für alle $z \neq c$.

Beweis Die Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ ist klar, denn

$$\tilde{f}(c) = \lim_n \tilde{f}(c + \frac{1}{n}) = \lim_n f(c + \frac{1}{n}).$$

Zur Existenz von $\tilde{f}$. Definiere $g(z) = \begin{cases} (z-c)^2 f(z) & z \neq c \\ 0 & z = c \end{cases}$

$$\text{Es folgt } |g(c+h) - g(c)| \leq |h|^2 \cdot M \quad \text{für } |h| \leq r$$

$\Rightarrow g$ stetig auf Ω , holomorph auf $\Omega - \{c\}$.

Korollar Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent

(i) f ist holomorph auf Ω

(ii) für jedes $c \in \Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B_\varepsilon(c)} \subseteq \Omega$ so, dass für alle stückweise stetig

diff'bare Weg $\gamma: [a,b] \rightarrow \overline{B_\varepsilon(c)}$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt $\int_\gamma f(z) dz = 0$

Bew: (i) $\Rightarrow$ (ii): $B_\varepsilon(c)$ ist sternförmig bzgl. c ,
heute § 3, 8.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $B_\varepsilon(c)$ ist sternförmig bzgl. c ,
heute § 3.14 Satz von Morera.

□

Weit $g(c+h) - g(c) = h^2 \cdot f(c+h)$ für $h \neq 0$

$\Rightarrow g$ zweifach diffbar in c . Folglich

$$g(c+h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot h^k \quad \text{in } B_\varepsilon(c), \quad \overline{B}_\varepsilon(c) \subseteq \Omega$$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ g'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(c+h) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k h^k$$

$$= h^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} h^k \Rightarrow f(c+h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} \cdot h^k$$

die Reihe ist nach Abels Theorem § 3.8 holomorph in $h=0$

