§1 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

1. **Def** Die Gauß'sche Zahlenebene ist $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Damit ist $\mathbb{C}$ ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum. Wir definieren eine Verknüpfung — die komplexe Multiplikation

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (u,v) \longmapsto uv$$

$$u = (u_1, u_2) \qquad v = (v_1, v_2)$$

$$uv = (u_1 v_1 - u_2 v_2,\ u_1 v_2 + u_2 v_1)$$

Elementares Nachrechnen zeigt: diese Verknüpfung ist

- kommutativ: $uv = vu \qquad \forall u,v \in \mathbb{C}$
- assoziativ: $(uv)w = u(vw) \qquad \forall u,v,w \in \mathbb{C}$
- distributiv: $(u+v)w = uw + vw$
  $u(v+w) = uv + uw$

Für die Standard-Basis $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ von $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$e_1 u = u e_1 \qquad \text{für alle } u \in \mathbb{C}$$

$$e_2^2 = -e_1$$

$0 = (0,0)$ $\qquad 0u = u0 = 0 \qquad$ für alle $u \in \mathbb{C}$

Damit ist gezeigt: $\mathbb{C}$ ist ein kommutativer Ring (mit Nullelement $0 = (0,0)$, Einselement $1 = e_1$)

Wir definieren die komplexe Zahl $i = e_2 = (0,1)$, damit gilt $i^2 = -1$ $\quad (e_2^2 = e_1)$

Der <u>Betrag</u> einer komplexen Zahl ist

$$|(u_1,u_2)| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

(= euklidische Norm des Vektors $(u_1,u_2)=u$)

Klar: $|u| \geq 0$ und $|u|=0$ gilt genau dann, wenn $u=0$.
Es gilt $|uv| = |u|\cdot|v|$.

Die <u>komplexe Konjugation</u> ist definiert durch

$$u=(u_1,u_2) \qquad \overline{u} = (u_1,-u_2)$$

Für die komplexe Konjugation gelten folgende Rechenregeln:

$$\overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v} \qquad \forall u,v \in \mathbb{C}$$

$$\overline{\overline{u}} = u \qquad \forall u \in \mathbb{C}$$

$$\overline{u+v} = \overline{u}+\overline{v} \qquad \forall u,v \in \mathbb{C}$$

$$u\overline{u} = |u|^2 \qquad \forall u \in \mathbb{C}$$

Die ersten drei Gleichungen sagen, dass die komplexe Konjugation ein <u>involutorischer Automorphismus</u> von $\mathbb{C}$ ist (involutorisch $\hat{=}$ zweimaliges Anwenden ist die Identität).

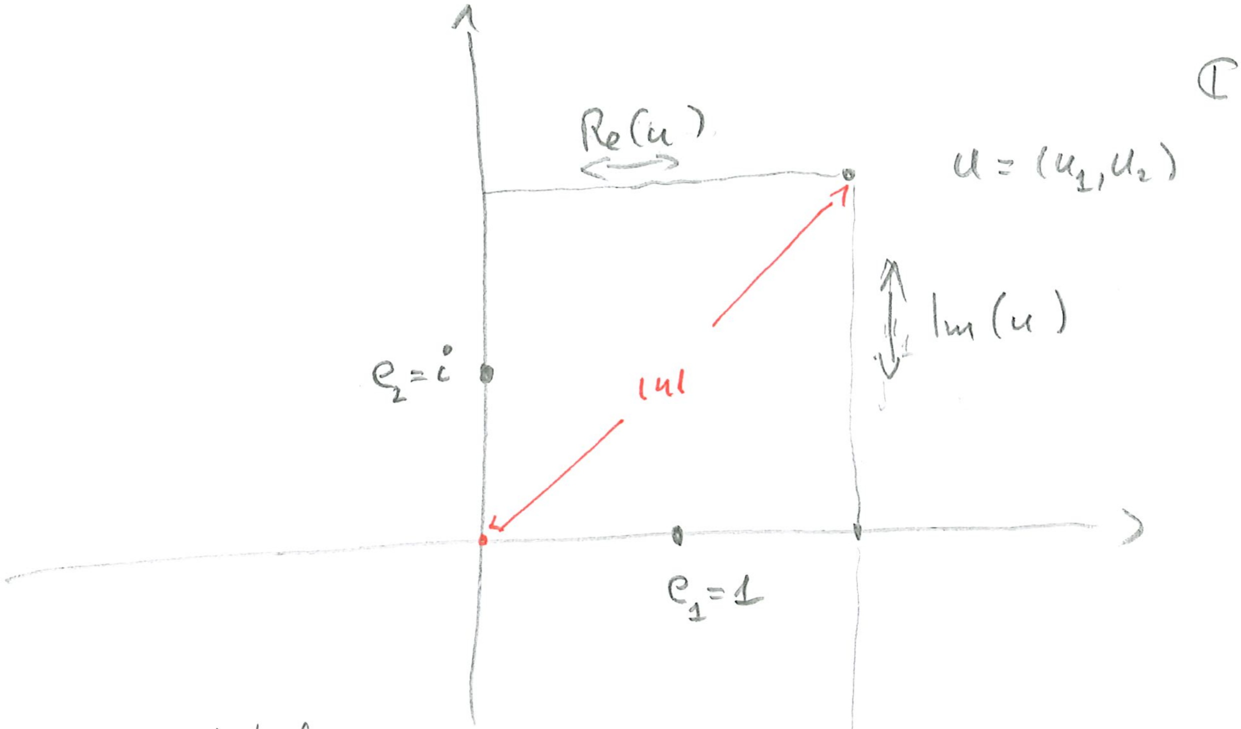
Ist $u \neq 0$, so folgt mit $v = \frac{1}{|u|^2}\overline{u} = \left(\frac{u_1}{u_1^2+u_2^2}, \frac{-u_2}{u_1^2+u_2^2}\right)$,

dann $\underset{=vu}{uv = 1}$. Damit ist gezeigt:

$\mathbb{C}$ ist ein <u>Körper</u>, jedes $u \in \mathbb{C}-\{0\}$ hat ein multiplikatives Inverses.

Für $u=(u_1,u_2)$ heißt u_1 <u>Realteil</u> und u_2 <u>Imaginärteil</u> von u, $u_1 = \mathrm{Re}(u)$, $u_2 = \mathrm{Im}(u)$

Wir betrachten das geometrisch in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$



$|u| \mathrel{\hat{=}}$ Abstand von u zu 0

$\overline{u} \mathrel{\hat{=}}$ Spiegelbild von u bzgl. Spiegelung an der x-Achse

$\overline{u} = (u_1, u_2)$

Bezüglich der Basis $e_1 = (1,0) = 1$
$e_2 = (0,1) = i$

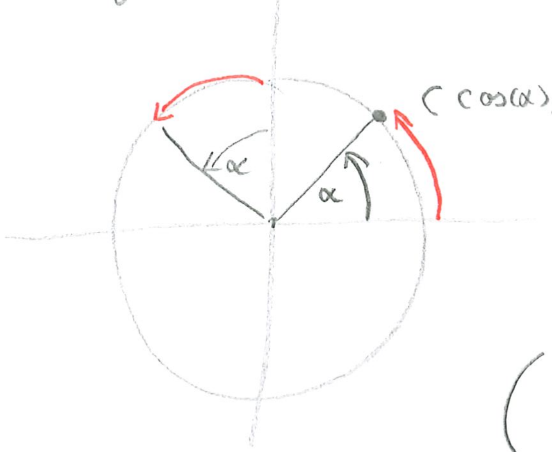
schreibt sich die komplexe Zahl $u = (u_1, u_2)$ als

$u = u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot i$. Ab jetzt benutzen wir diese Schreibweise für komplexe Zahlen.

Wir identifizieren dabei die reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $(r,0) = r \cdot 1$, d.h. wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit der x-Achse in $\mathbb{R}^2$

2. Die komplexen Zahlen als Drehstreckungen.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, betrachte die **Drehung** $R(\alpha)$ der Ebene um den Winkel α



Bezüglich der Basis e_1, e_2 hat $R(\alpha)$ die Matrixgestalt

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} c = \cos(\alpha) \\ s = \sin(\alpha) \end{array}$$

(wobei wir $e_1 = \binom{1}{0}$ und $e_2 = \binom{0}{1}$ als Spaltenvektoren schreiben!)

Es gilt $c^2+s^2=1$. Sind umgekehrt c, s reelle Zahlen mit $c^2+s^2=1$, so ist (c,s) ein Punkt auf dem Einheitskreis und $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ ist eine Drehung.

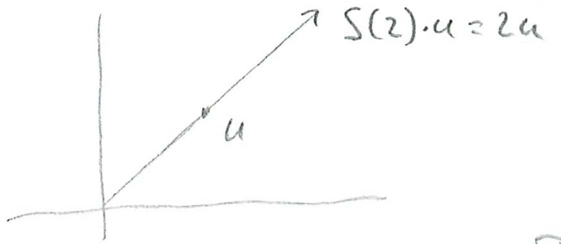
Es gilt
$$R(\alpha) \circ R(\beta) = R(\alpha+\beta)$$
$$R(\alpha) \circ R(-\alpha) = \mathrm{id}$$

d.h. die Drehungen bilden eine (abelsche) Gruppe,

die **Kreisgruppe** $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} c, s \in \mathbb{R} \\ c^2+s^2=1 \end{array} \right\}$

Für $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ betrachte die <u>Streckung</u>

$S(r): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto ru$ (Streckung um Faktor r)



Das Produkt einer Drehung $R(\alpha)$ und einer Streckung $S(r)$ nennt man eine <u>Drehstreckung</u>.

In Matrizen schreiben

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rc & -rs \\ rs & rc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Wir setzen $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$

Offensichtlich gilt:

(1) G ist abgeschlossen unter Addition

(2) G ist abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation

G ist genau die Menge der Drehstreckungen von $\mathbb{R}^2$.

Zu (2): $$\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} u_1 v_1 - u_2 v_2 & -u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ u_2 v_1 + u_1 v_2 & u_1 v_1 - u_2 v_2 \end{pmatrix} \in G$$

In den Matrizeneinträgen sehen wir genau die in §1.1 definierte komplexe Multiplikation wieder. Genauer: die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow G \qquad u_1 1 + u_2 i \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$$

ist ein Isomorphismus von Ringen (oder Körpern), d.h.

$$\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v) \qquad \Phi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(uv) = \Phi(u) \circ \Phi(v)$$

Beachte auch: $\det \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2$,

die Inverse von $\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$ ist die Drehstreckung

$$\frac{1}{u_1^2+u_2^2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}$$

und damit $\det \Phi(u) = |u|^2$

$$\Phi(\bar{u}) = \Phi(u)^T$$

↑ transponierte Matrix

$$\mathrm{Re}(u) = \frac{1}{2} \mathrm{Spur}(\Phi(u))$$

#

Der komplexen Zahl i entspricht die Drehung $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ um 90°

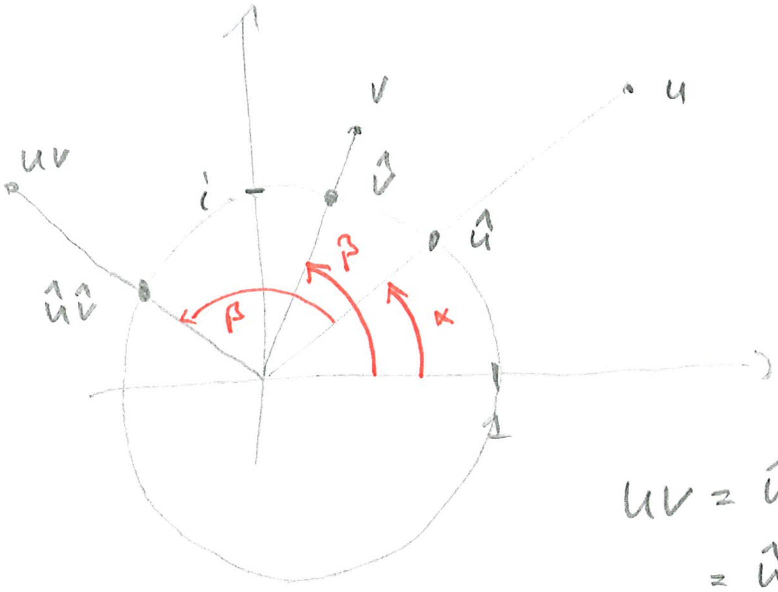
(im Uhrzeigersinn)

3. Polarkoordinaten

Beobachtung: jede komplexe Zahl $u \neq 0$ hat eine eindeutige Darstellung $u = r \cdot \hat{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und $\hat{u} \in \mathbb{C}$ mit $|\hat{u}| = 1$. Denn dann gilt $|u| = r$ und $\hat{u} = \frac{1}{|u|} u$. Dabei entspricht

$\hat{u}$ der Drehung und

r der Streckung



Für $u, v \neq 0$ gilt dann

$$uv = \widehat{uv} \cdot t \qquad t = |u| \cdot |v|$$
$$= \hat{u}\hat{v} \cdot t$$

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen $u, v \neq 0$ **addieren** sich die Winkel (zur x-Achse) und **multiplizieren** sich die Längen (Beträge).

Jetzt betrachten wir Folgen und Konvergenz in $\mathbb{C}$.

4. Topologie in $\mathbb{C}$

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $z_n = x_n + i y_n$

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$

(i) Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$ gdw es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt so, dass für alle $n \geq m$ gilt $|z_n - z| \leq \varepsilon$. Schreiben kurz $\lim_n z_n = z$

Äquivalent dazu: $\lim_n x_n = x$, $\lim_n y_n = y$ und $z = x + iy$.

[üA!]

(ii) Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge gdw es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt so, dass für alle $k, l \geq m$ gilt $|z_k - z_l| \leq \varepsilon$.

Jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist eine Cauchy-Folge [üA]

Satz Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert, d.h. $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Beweis Für jede komplexe Zahl u gilt

$|Re(u)|, |Im(u)| \leq |u|$, denn: $u = u_1 + i u_2$ $\quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

$u_1^2, u_2^2 \leq u_1^2 + u_2^2 \Rightarrow Re(u)^2, Im(u)^2 \leq |u|^2$

$\Rightarrow Re(u), Im(u) \leq |u|$.

Es folgt: ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so sind auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen ($|z_k - z_\ell| \leq \varepsilon \Rightarrow |x_k - x_\ell| \leq \varepsilon \ldots$). Da $\mathbb{R}$ vollständig ist (Ana I), konvergieren beide Folgen. Setze $x = \lim_n x_n$, $y = \lim_n y_n$, $z = x + iy$. Dann gilt $z = \lim_n z_n$ nach (i). $\square$

(iii) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt <u>offen</u>, wenn es zu jedem $u \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass gilt

$$B_\varepsilon(u) \subseteq U.$$

Dabei ist $B_\varepsilon(u) = \{ v \in \mathbb{C} \mid |u - v| < \varepsilon \}$ der <u>ε-Ball</u> um u.

Beachte: $\emptyset$ und $\mathbb{C}$ sind offen.

<u>Satz</u> Der Durchschnitt von <u>endlich vielen</u> offenen Mengen ist offen. Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

<u>Beweis</u> Seien $U_1, \ldots, U_m \subseteq \mathbb{C}$ offene Mengen, sei $u \in U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_m$. Dann gibt es zu jedem $j = 1, \ldots, m$ ein $\varepsilon_j > 0$ mit $B_{\varepsilon_j}(u) \subseteq U_j$. Setze $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$. Dann ist $\varepsilon > 0$ und

$$B_\varepsilon(u) \subseteq U_j \quad j = 1, \ldots, m \Rightarrow B_\varepsilon(u) \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_m.$$

Sei nun $\mathcal{U}$ eine Menge von beliebig vielen offenen Mengen, sei $u \in \bigcup \mathcal{U}$. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $u \in U$, also $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(u) \subseteq U$. Da $U \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ gilt, folgt $B_\varepsilon(u) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. $\square$

Der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen <u>nicht</u> offen [ÜA].

(iv) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn gilt: für <u>jede</u> Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A (also $z_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$) mit Grenzwert $\lim_n z_n = z$ gilt auch $z \in A$.

<u>Satz</u> Es gilt: $A \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $U = \mathbb{C} - A = \{u \in \mathbb{C} \mid u \notin A\}$ offen ist.

<u>Beweis</u> Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ und sei $U = \mathbb{C} - A$.

(a) Wenn U offen ist, so ist A abgeschlossen.

<u>Denn</u>: ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert $\lim_n z_n = z \in U$ und ist $B_\varepsilon(z) \subseteq U$, so gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, dass $z_k \in B_\varepsilon(z) \subseteq U$ gilt für alle $k \geq m$. Damit verläuft die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>nicht</u> in A

(b) Wenn U nicht offen ist, so ist A nicht abgeschlossen.

Denn: Dann gibt es $u \in U$ so, dass für kein $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(u) \subseteq U$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $v \in A \cap B_\varepsilon(u)$. Wähle $z_n \in A \cap B_{\frac{1}{n}}(u)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$
$\Rightarrow \lim_n z_n = u \notin A \Rightarrow A$ ist nicht abgeschlossen. $\square$

Achtung! Es gibt viele Teilmengen von $\mathbb{C}$, die weder offen noch abgeschlossen sind. [Ü4]

Beachte: $\emptyset$ und $\mathbb{C}$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen!

(V) Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann heißt f stetig im Punkt $u \in X$, falls Folgendes gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $v \in X$ mit $|u - v| \leq \delta$ gilt $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.
(Wenn f in jedem $u \in X$ stetig ist, heißt f stetig.)
Äquivalent dazu: für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit Grenzwert $\lim_n z_n = u$ konvergiert die Folge $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(u)$, kurz $\lim_n f(z_n) = f(u)$.
[Ü4]

Das wird oft so abgekürzt:

$$\lim_{z \to u} f(z) = f(u)$$

Bemerkungen über stetige Funktionen. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Sind $f : X \to \mathbb{C}$ und $g : X \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch $f+g : X \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z)+g(z)$ stetig und $f \cdot g : X \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z)\cdot g(z)$ stetig.
Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in X$, so ist auch

$$\frac{1}{f} : X \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{f(z)} \quad \text{stetig.}$$

(b) Ist $Y \subseteq \mathbb{C}$ mit $f(X) \subseteq Y$ und sind $f : Y \to X$ sowie $g : Y \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Komposition $g \circ f : z \longmapsto g(f(z))$ stetig.

(c) jede konstante Funktion ist stetig

(d) Aus (a), (c) folgt: jede Polynomfunktion
$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ $\qquad a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$
ist stetig.

(e) Setze $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$, $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$.
Dann gilt $f(z) = u(z) + i\,v(z)$, folglich ist f genau dann stetig, wenn u und v stetig sind.

[üA]

5. <u>Def</u> Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, sei $\gamma : [0,1] \to X$ stetig. Dann heißt γ ein <u>Weg in X</u> von $a = \gamma(0)$ nach $b = \gamma(1)$.

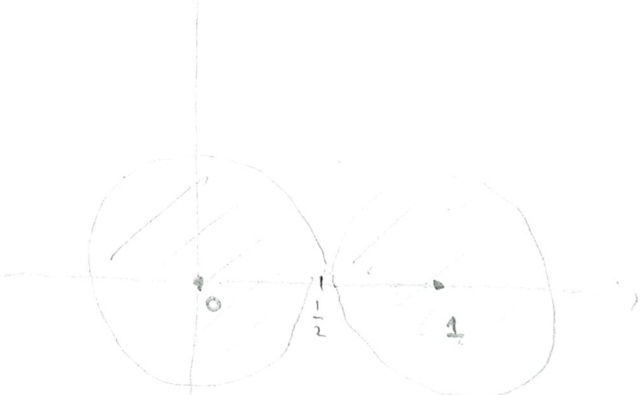
Wenn es für alle $a, b \in X$ stets ein Weg von a nach b gibt, heißt X <u>wegzusammenhängend</u>.

<u>Bsp</u> (a) $\mathbb{C}$ ist wegzush.: $a, b \in \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = t \cdot b + (1-t) \cdot a$$

(b) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist wegzush (genauso wie in (a)).

(c) $X = B_{\frac{1}{2}}(0) \cup B_{\frac{1}{2}}(1)$ ist <u>nicht</u> wegzush.



Denn: angenom., γ wäre ein Weg von 0 nach 1. Betrachte die stetige Abbildung $f(t) = \mathrm{Re}(\gamma(t))$. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Nach dem <u>Zwischenwertsatz</u> (Ana I) gibt es $s \in [0,1]$ mit $f(s) = \frac{1}{2}$.

Dann ist $\gamma(s) = z$ ein Punkt mit $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Aber für alle $u \in X$ gilt $\mathrm{Re}(u) \neq \frac{1}{2}$, also ist γ <u>kein</u> Weg in X.

Lemma Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ wegzusammenhängend und sei $f: X \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist auch $f(X) \subseteq \mathbb{C}$ wegzush., $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Bew. Sei $a, b \in f(X)$. Dann gibt es $u, v \in X$ mit $a = f(u)$, $b = f(v)$. Sei $\gamma: [0,1] \to X$ ein Weg von u nach v. Dann ist $f \circ \gamma: [0,1] \to f(X)$ ein Weg in $f(X)$ von a nach b. $\square$

Beobachtung Sei $a, b, c \in \mathbb{C}$, sei $\gamma_1: [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg von a nach b und sei $\gamma_2: [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg von b nach c. Definiere $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Schreibe $\gamma = \gamma_2 * \gamma_1$.

Dann ist $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg von a nach c.

Denn: (1) klar: γ ist stetig in jedem Punkt $t \neq \frac{1}{2}$

(2) γ ist stetig im Punkt $t = \frac{1}{2}$: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass gilt: $|t-1| \le \delta \Rightarrow |\gamma_1(1) - \gamma_1(t)| \le \varepsilon$

und $|t-0| \le \delta \Rightarrow |\gamma_2(0) - \gamma_2(t)| \le \varepsilon$

Ist also $|t - \frac{1}{2}| \le \frac{\delta}{2}$, so folgt $|\gamma(t) - \gamma(\frac{1}{2})| \le \varepsilon$. $\square$

6. **Def** Eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet** (engl. **domain**), wenn gilt:

(i) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist offen

(ii) $\Omega \neq \emptyset$

(iii) Ω ist wegzusammenhängend

Bsp (a) $\mathbb{C} = \Omega$ ist Gebiet

(b) die Kreisscheibe $B_\varepsilon(u) = \{ v \in \mathbb{C} \mid |u-v| < \varepsilon \}$ ist ein Gebiet, für jedes $u \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$.

Lemma Seien $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete, mit $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_m \neq \emptyset$. Dann ist $\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_m = \Omega$ ein Gebiet.

Beweis Ω ist offen nach § 1.4 und $\Omega \neq \emptyset$.

Zu zeigen: Ω ist wegzsh. Sei $p \in \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_m$, seien $a, b \in \Omega$. Dann gibt es i, j mit $a \in \Omega_i$, $b \in \Omega_j$. Weiter ist $p \in \Omega_i$ und $p \in \Omega_j$. Sei γ_1 ein Weg in Ω_i von a nach p und sei γ_2 ein Weg in Ω_j von p nach b. Dann ist $\gamma = \gamma_2 * \gamma_1$ ein Weg in $\Omega_i \cup \Omega_j \subseteq \Omega$ von a nach b. $\square$

<u>Bemerkung</u> Das Argument zeigt auch: die Vereinigung von beliebig vielen Gebieten ist ein Gebiet, falls alle diese Gebiete mindestens einen Punkt gemeinsam haben.
[ÜA]

—

Gebiete in $\mathbb{C}$ sind die Analoga von offenen Intervallen in $\mathbb{R}$.