

9. Übungszettel zur Vorlesung „Funktionentheorie“

SoSe 2021
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Lara Beßmann
Daniel Keppeler

Aufgabe 9.1

Seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Wenn $f(n) = g(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, so ist $f = g$.
- b) Wenn $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt, so ist $f = g$.

Aufgabe 9.2

Es sei G die Menge aller komplexen 2×2 Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

- a) Zeigen Sie, dass G bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.
- b) Es sei $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(B_1(0))$ die Abbildung, die $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ auf $f_{a,b}$ abbildet.
Zeigen Sie, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Hinweis: Überlegen Sie zuerst, welche Axiome Sie bei a) und b) zeigen müssen.

Aufgabe 9.3

Sei $\Omega_1 = B_1(0)$ und $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. Zeigen Sie, dass $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, $z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}$ eine biholomorphe Abbildung ist.

Aufgabe 9.4

Sei $g: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $g(z) = \begin{cases} \frac{z}{\exp(z)-1} & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0 \end{cases}$

- a) Zeigen Sie, dass g holomorph auf $B_1(0)$ ist.
- b) In der Taylorreihe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ bestimmen Sie a_k für $k = 0, 1, \dots, 5$.
Hinweis: Leiten Sie $g(z)(\exp(z) - 1) = z$ ab.

Aufgabe 9.*

Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

a) $\int_{|z|=1} \frac{z - z^{-1}}{2z - 1} dz$

b) $\int_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{4z + 1} dz$

c) $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+1)(z-1)^3} dz$

d) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\exp(1-z)}{z^3(1-z)} dz$

Abgabe bis: Donnerstag, den 24.06.2021, 8 Uhr online im Learnwebkurs