4. Übungszettel zur Vorlesung „Funktionentheorie“

SoSe 2021
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Lara Beßmann
Daniel Keppeler

Aufgabe 4.1

Zeigen Sie: für jedes $w \in \mathbb{C}$ gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) = w$. Warum ist das kein Widerspruch zur Gleichung $\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$?

Aufgabe 4.2

Leiten Sie die folgenden Gleichungen für $a, b \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der Eulerschen Formel her:

a) $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

b) $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

c) $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

d) $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Aufgabe 4.3

Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ mit $0 \notin \Omega$ und sei $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf Ω . Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) Es gibt ein p in Ω mit $\exp(g(p)) = p$ und $g'(z) = 1/z$ für alle $z \in \Omega$.

(ii) Es gilt $\exp \circ g = id_{\Omega}$.

Aufgabe 4.4

Es sei $w \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion:

a) Für jede natürliche Zahl $k > 0$ gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z^k = w$.

b) Für jede natürliche Zahl $k > 0$ gibt es höchstens k verschiedene Lösungen der Gleichung $z^k = w$.

Abgabe bis: Freitag, den 14.05.2021, 8 Uhr online im Learnwebkurs