3. Übungszettel zur Vorlesung „Funktionentheorie“

SoSe 2020
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Lara Beßmann
Daniel Keppeler

Aufgabe 3.1

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie: wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0.
Gilt die Umkehrung auch?

Aufgabe 3.2

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie: wenn die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert, so gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Aufgabe 3.3

Beweisen Sie folgende Variante des Quotientenkriteriums.

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $0 \leq \lambda < 1$ und gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \lambda$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Aufgabe 3.4

Zeigen Sie (zum Beispiel mit Induktion), dass für alle $n \geq 1$ und $x \neq y$ gilt

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Abgabe bis: Donnerstag, den 06.05.2021, 8 Uhr online im Learnwebkurs