11. Übungszettel zur Vorlesung „Funktionentheorie“

SoSe 2021
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Lara Beßmann
Daniel Keppeler

Aufgabe 11.1

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine zweimal total differenzierbare Funktion $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *harmonisch*, wenn gilt $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$. Zeigen Sie:

- Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so sind $u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$ harmonisch.
- Ist $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, so ist $f = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ holomorph.

Aufgabe 11.2

Finden Sie alle Polstellen und alle Residuen der folgenden Funktionen.

- $\frac{1}{z^2 + 5z + 6}$
- $\frac{1}{(z^2 - 1)^2}$
- $\frac{1}{\sin(z)}$
- $\frac{1}{\sin^2(z)}$

Aufgabe 11.3

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, sei $c \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Zeigen Sie: es gibt eine Konstante $M \geq 0$ so, dass $|f^{(n)}(c)| \leq M \frac{n!}{r^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 11.4

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $c \in \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega - \{c\})$. Zeigen Sie: wenn es $M \geq 0$ gibt so, dass $\operatorname{Re}(f(z)) \leq M$ für alle $z \in \Omega - \{c\}$, so hat f in c eine hebbare Singularität.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\exp(f(z))$.

Aufgabe 11.*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

- $\int_{|z|=1} \exp(z) z^{-n} dz$ für $n \in \mathbb{Z}$.
- $\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz$ für $m, n \in \mathbb{Z}$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 08.07.2021, 8 Uhr online im Learnwebkurs