10. Übungszettel zur Vorlesung „Funktionentheorie“

SoSe 2021
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Lara Beßmann
Daniel Keppeler

Aufgabe 10.1

Bestimmen Sie die Kreistränge, auf denen die folgenden Laurent-Reihen konvergieren.

- a) $\sum_{-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$, $c = 0$
- b) $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$, $c = 1$
- c) $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{1+n^2}$, $c = 0$
- d) $\sum_{-\infty}^{\infty} 2^n (z+2)^n$, $c = -2$

Aufgabe 10.2

Stellen Sie die Laurent-Reihen für folgende Funktionen auf:

- a) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ in $0 < |z-1| < 1$, $0 < |z-2| < 1$, $|z| > 2$, $|z-1| > 1$ und $|z-2| > 1$
- b) $\frac{z^2-1}{z^2+1}$ in $0 < |z-i| < 1$ und $|z+i| > 2$

Aufgabe 10.3

Bestimmen Sie, ob es sich bei der isolierten Singularität in $c = 0$ der folgenden Funktionen um eine hebbare Singularität, einen Pol oder eine wesentliche Singularität handelt.

- a) $\frac{1}{1-\exp(z)}$
- b) $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$
- c) $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$
- d) $\frac{\sin(z)}{z}$

Aufgabe 10.4

Es sei c eine isolierte Singularität von $f(z)$. Zeigen Sie, dass c kein Pol von $\exp(f(z))$ ist.

Aufgabe 10.*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ für $k \in \mathbb{N}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} z^n$

Abgabe bis: Donnerstag, den 01.07.2021, 8 Uhr online im Learnwebkurs