1. Übungszettel zur Vorlesung „Funktionentheorie“

SoSe 2020
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Lara Beßmann
Daniel Keppeler

Aufgabe 1.1

Zeigen Sie:

- Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
- Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_n = x_n + i \cdot y_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen y konvergieren (in $\mathbb{R}$).

Aufgabe 1.2

- Zeigen Sie, dass der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist.
- Zeigen Sie, dass der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen im Allgemeinen nicht offen ist.
- Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, welche weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 1.3

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, sei $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung, sei $u \in X$.

Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $v \in X$ mit $|u - v| \leq \delta$ gilt $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.
- Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = u$ konvergiert die Folge $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(u)$.

Aufgabe 1.4

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

- Sind $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so sind auch $f + g : X \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) + g(z)$ und $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) \cdot g(z)$ stetig.
Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in X$, so ist auch $\frac{1}{f} : X \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ stetig.

- b) Ist $Y \subseteq \mathbb{C}$ mit $f(X) \subseteq Y$ und sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Komposition $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto g(f(z))$ stetig.
- c) Jede Polynomfunktion $g : X \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ist stetig.
Hinweis: Verwende Aufgabenteil a).
- d) Setze $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$ und $v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$. Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn u und v stetig sind.

Abgabe bis: Donnerstag, den 22.04.2021, 8 Uhr online im Learnwebkurs