

§4 Darstellungen endlicher Gruppen

1. Def Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum, sei G eine Gruppe.

Ein Homomorphismus $\rho: G \rightarrow GL(V)$ heißt

Darstellung von G , und V heißt dann

ein G -Modul. Die Dimension der Darstellung ist $\dim(V)$.

Die Gruppe G wirkt dann auf V durch

$$G \times V \rightarrow V, (g, v) \mapsto gv = \rho(g)(v)$$

und für jedes $g \in G$ ist $\rho(g)$ eine invertierbare lineare Abbildung.

Beispiele (a) $G \subseteq GL(V)$ beliebige Untergruppe,

$\rho: G \hookrightarrow GL(V)$ die Inklusionsabbildung,

(b) G beliebig, $\rho(g) = \text{id}$, für alle $g \in G$.

Das ist die triviale Darstellung.

(c) G endliche Gruppe,

$$V = C(G, \mathbb{C}) = \{ f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ Abbildung} \}$$

$$V \cong \mathbb{C}^n \quad \text{mit } n = |G|$$

G wirkt auf V durch

$$(gf)(a) = f(g^{-1}a) \quad \begin{array}{l} f \in V \\ g, a \in G \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Nachrechnen: } h(gf)(a) &= f(g^{-1}h^{-1}a) = f((hg)^{-1}a) \\ &= ((hg)f)(a) \end{aligned}$$

Eine Darstellung heißt triv, wenn $\rho(g) = \text{id}$.

Die Darstellungen in (a), (c) sind also triv.

(1) Seien $G \xrightarrow{\rho} GL(V)$, $G \xrightarrow{\sigma} GL(W)$

zwei Darstellungen der Gruppe G . Dann

erhält man eine Darstellung $\rho \oplus \sigma$ auf

$$V \oplus W = \{ (v, w) \mid v \in V, w \in W \} \text{ durch}$$

$$(\rho \oplus \sigma)(g)(v, w) = (\rho(g)v, \sigma(g)w)$$

(2) Sei $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung, sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir nennen W G -invariant, falls für alle $g \in G, w \in W$ gilt $\rho(g)w \in W$, d.h. $\rho(g)(W) = W$ für alle $g \in G$. Dann heißt W ein G -Untervektorraum von V .

Bsp $\mathbb{C}^3, V$ sind stets G -Untervektorräume.

(3) Zwei Darstellungen $\rho: G \rightarrow GL(V)$
 $\sigma: G \rightarrow GL(W)$

heißen äquivalent oder isomorph,

wenn es einen Isomorphismus $\varphi: V \rightarrow W$ von Vektorräumen gibt, so dass für alle $g \in G$ gilt $\varphi(\rho(g)v) = \sigma(g)\varphi(v)$,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(g)} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ W & \xrightarrow{\sigma(g)} & W \end{array}$$

(4) Eine Darstellung $\rho: G \rightarrow GL(V)$ heißt irreduzibel, wenn $V, \{0\}$ die einzigen G -invarianten Teilräume in V sind und wenn $V \neq \{0\}$.

Bsp Wenn $\dim(V) = 1$, dann ist jede Darstellung $G \rightarrow GL(V)$ irreduzibel.

2. Satz Sei G abelsch. Dann ist jede irreduzible Darstellung $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 1-dimensional, also $\dim(V) = 1$.

Beweis Sei $g \in G$ beliebig. Dann hat $\rho(g) \in GL(V)$ ein Eigenwert λ , denn das charakteristische Polynom von $\rho(g)$ hat eine komplexe Nullstelle λ . Sei W der zugehörige Eigenraum, $W = \{w \in V \mid \rho(g)w = \lambda w\}$

es $W \neq \{0\}$. Für $h \in G, w \in W$ folgt

$$\left. \begin{array}{l} \rho(hg)w = \lambda \rho(h)w \\ \text{"} \\ \rho(gh)w = \rho(g)(\rho(h)w) \end{array} \right\} \Rightarrow \rho(h)w \in W$$

$\Rightarrow W$ ist G -invariant $\rightarrow W = V \Rightarrow$

$\rho(g) = \lambda \cdot \text{id}_V \Rightarrow$ jedes 1-dimensionale Unterraum

von V ist G -invariant $\Rightarrow \dim(V) = 1$



3. Def Ein Darstellung $\rho: G \rightarrow GL(V)$ heißt vollständig reduzibel, wenn folgendes gilt: zu jedem G -invariant Teilraum $W \subseteq V$ gibt es einen G -invariant Teilraum $U \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$, d.h. $U \cap W = \{0\}$, $V = U + W$.

Satz Wenn $\rho: G \rightarrow GL(V)$ vollständig reduzibel ist, dann gibt es G -invariant Teilräume $W_1, \dots, W_n \subseteq V$ mit $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$ und jedes Untermodul W_k ist irreduzibel.

Beweis Induktion nach $m = \dim(V)$. Für $m = 0, 1$ ist nichts zu zeigen. Sei jetzt $m \geq 2$, sei $W_1 \subseteq V$ ein Untermodul so, dass $\dim(W_1) > 0$ so klein wie möglich ist. Dann ist W_1 ein irreduzibler Untermodul (!), wir suchen ein Untermodul $U \subseteq V$ mit $V = W_1 \oplus U$ und $\dim(U) < \dim(V)$. Nach Ind. Annahme gilt $U = W_2 \oplus \dots \oplus W_n$, alle W_k irreduzibel $\Rightarrow W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$.

□

⊗ U ist auch vollständig reduzibel:

ist $X \subseteq U$ ein G -invariant Teilraum, so
gibt es $Y \subseteq V$ G -invariant mit $V = X \oplus Y$

Für $u \in U$, $u = x + y$ mit $x \in X$, $y \in Y$ folgt

$$y = u - x \in U \Rightarrow U = U \cap (X \oplus Y) = X \oplus (U \cap Y)$$

$\Rightarrow U$ ist vollständig reduzibel.

4. Theorem (Satz von Maschke)

[H. Maschke, deut. Mathematik, 1853-1908]

Wenn G endlich ist, dann ist jede Darstellung $\rho: G \rightarrow GL(V)$ vollständig reduzibel.

Beweis Sei $W \subseteq V$ ein G -invarianter Teilraum.

Dann gibt es ein Unterraum $U_0 \subseteq W$ mit $V = W \oplus U_0$. (aber U_0 ist eventuell nicht G -invariant).

Betrachte die Projektion $T: V \rightarrow W$,

$$v = w + u, \quad w \in W, \quad T v = w \\ u \in U_0$$

$$\Rightarrow T(V) = W, \quad T w = w \Leftrightarrow w \in W, \quad T \text{ linear.}$$

Sei $n = |G|$, wir definieren

$$\tilde{T} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \rho(g) T \rho(g)^{-1} \Rightarrow \tilde{T} \text{ linear}$$

$$\tilde{T} v = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \rho(g) T \underbrace{\rho(g)^{-1}(v)}_{\substack{\in V \\ \in W}} \in W$$

Für alle $v \in V$. Für $w \in W$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{T} w &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \rho(g) T \underbrace{\rho(g)^{-1} w}_{\in W} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \rho(g) \rho(g)^{-1} w = \frac{1}{n} n \cdot w = w \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{T}(V) = W$. Wir set $U = \ker(\tilde{T})$.

Dann gilt $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$ (Dimensionsformel für lineare Abbildungen) und $U \cap W = \{0\}$

(siehe oben), damit $V = U \oplus W$ (aus

Dimensionsgründen, $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$)

Für $u \in U$, $h \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{T}g(h)u &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g(y) T g(g^{-1}) g(h) u \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g(h) \underbrace{g(h^{-1}) g(g)} T \underbrace{g(g^{-1}) g(h)} u = g(h) \underbrace{\tilde{T}u}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow U$ ist G -invariant.

□

#

Um die Darstellungen endlicher Gruppe G zu verstehen, muß man also die irreduziblen Darstellungen kennen. Da für verstehen wir § 4.3 etwas.

5. Def Seien $\rho: G \rightarrow GL(V)$ und $\sigma: G \rightarrow GL(W)$

Darstellung einer Gruppe G . Eine lineare Abbildung

$f: V \rightarrow W$ heißt Homomorphism von G -Modulen,

wenn für alle $g \in G, v \in V$ gilt $f(\rho(g)v) = \sigma(g)f(v)$,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(g)} & V \\ f \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\sigma(g)} & W \end{array}$$

Wir setzen $\text{Hom}_G(U, V) = \{f: U \rightarrow V \mid f \text{ ist Hom. von } G\text{-Modulen}\}$,
das ist ein komplexer Vektorraum.

Lemma Ist $f: U \rightarrow V$ ein Hom. von G -Modulen,
dann sind $f(U) \subseteq V$ sowie $\ker(f)$ G -Modul.

Beweis $f(v) = 0 \Rightarrow f(\rho(g)v) = \sigma(g)f(v) = 0$
 $\Rightarrow \ker(f)$ ist G -Modul

$\sigma(g)f(v) = f(\rho(g)v) \in f(V) \Rightarrow f(V) \subseteq W$ ist
 G -Modul.

Korollar A Ist $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphism von
irreduziblen Darstellungen von G , so ist $f = 0$
oder f ist ein Isomorphismus.

Beweis Wenn $f \neq 0$, so ist $\ker(f) \neq V \Rightarrow$
 $\ker(f) = \{0\}$, f injektiv. Womit ist $f(V) \neq \{0\}$
 $\Rightarrow f(V) = W$, f surjektiv. $\square$

Korollar D Sei $\rho: G \rightarrow GL(V)$ und $\tau: G \rightarrow GL(W)$

113½

irreduzible Darstellungen. Dann gilt:

(a) $\text{Hom}_G(V, W) = \{0\}$ falls $V \not\cong W$ als

G -Moduln

(b) $\dim \text{Hom}_G(V, W) = 1$ falls $V \cong W$.

Beweis (a) folgt aus Korollar A. $\square$

(b): Sei $h: W \rightarrow V$ ein Isomorphismus von G -Moduln,

sei $f \in \text{Hom}_G(V, W)$. Dann ist $f \circ h: W \rightarrow W$

ein Hom. von G -Moduln. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein

Eigenwert. Der zugehörige Eigenraum $U \subseteq W$ ist

G -invariant ($u \in U, g \in G \Rightarrow (f \circ h)g(u)u$

$= g(u)(f \circ h)u = \lambda g(u)u$), also $U = W$

$\Rightarrow f \circ h = \lambda \cdot \text{id}_W \Rightarrow f = \lambda \cdot h^{-1}$

Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\lambda h^{-1} \in \text{Hom}_G(V, W)$. $\square$

6. Lemma Sei $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ $g_i: G \rightarrow GL(V_i)$ irreduzibel

Darstellungen, $i = 1, \dots, m$. Ist $W \subseteq V$ ein G -invariant Teilraum, so gibt es $I \subseteq \{1, \dots, m\}$

mit $V = W \oplus \bigoplus_{i \in I} V_i$. Wobei ist

$$W \cong \bigoplus_{j \in J} V_j \quad \text{für } J = \{1, \dots, m\} - I.$$

Beweis Sei $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine maximale

Teilmenge mit $W \cap \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) = \{0\}$. Setze

$$\tilde{V} = W \oplus \bigoplus_{i \in I} V_i \subseteq V. \quad \text{Beh: } V = \tilde{V}.$$

Dann: für $k \in \{1, \dots, m\}$ betrachte den G -invariant

Teilraum $\tilde{V} \cap V_k$ ($\tilde{V}$ ist G -invariant!)

Wenn $\tilde{V} \cap V_k = \{0\}$, so wäre $W \cap (V_k \oplus \bigoplus_{i \in I} V_i) = \{0\}$

∇ zur Maximalität von I .

Also ist $\tilde{V} \cap V_k = V_k \Rightarrow V_k \subseteq \tilde{V} \Rightarrow V \subseteq \tilde{V} \subseteq V. \quad \square$

Betrachte jetzt den G -Homomorphism

$$h: \bigoplus_{i=1}^m V_i \rightarrow \bigoplus_{j \in J} V_j, \quad J = \{1, \dots, m\} - I$$

$$\sum_{i=1}^m v_i \mapsto \sum_{j \in J} v_j$$

$$v_i \in V_i$$

mit $\ker(h) = \bigoplus_{i \in I} V_i$. Dann ist $h|_W$

injektiv (mit $\ker(h) \cap W = \{0\}$) und $\dim W =$

$\dim \bigoplus_{j \in J} V_j \Rightarrow h$ bildet W isomorph auf

$\bigoplus_{j \in J} V_j$ ab. □

7. Theorem

Seien $\rho_i: G \rightarrow GL(V_i)$ $i = 1, \dots, m$

$\rho_j: G \rightarrow GL(W_j)$ $j = 1, \dots, n$

irreduziblen Darstellungen, $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, $W = \bigoplus_{j=1}^n W_j$.

Wenn die G -Moduln V und W isomorph sind,

dann ist $m=n$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \text{Sym}(n)$

mit $V_i \cong W_{\sigma(j)}$ (als G -Moduln isomorph).

Beweis: Induktion nach m , oB $m \geq 1$.

$m=1$ Dann ist V irreduzibel, also auch W irreduzibel,

$\Rightarrow n=1$, fertig.

$m \geq 2$ Nach §4.6 gibt es $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ mit

$$W = F(V_1) \oplus \bigoplus_{i \in I} W_i, \quad J = \{1, \dots, n\} - I,$$

$F(V_1) \cong \bigoplus_{j \in J} W_j$ ist irreduzibel (§4.5)

$\Rightarrow J = \{j\}$, $V_1 \cong W_j$

Betrachte jetzt den Homom. von G -Moduln

$$h: F(V_1) \oplus \bigoplus_{i \in I} W_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} W_i$$

$$F(v) + \sum_{i \in I} w_i \mapsto \sum_{i \in I} w_i \quad \begin{matrix} v \in V \\ w_i \in W_i \end{matrix}$$

mit $\ker(h) = F(V_1)$. Dann ist

$$F(V_2 \oplus \dots \oplus V_m) \cap \ker(h) = 0, \quad \dim \bigoplus_{i=2}^m V_i = \dim \bigoplus_{i \in I} W_i$$

$\Rightarrow$ wir haben ein Isomorphism

$$F(V_2 \oplus \dots \oplus V_m) \cong \bigoplus_{i \in I} W_i$$

Nach Ind. Annahme ist $m-1 = |I| = n-1$

$$\text{Somit } V_i \cong W_{w(i)} \\ i = 1, \dots, m$$

$$w(1) = j$$

□

Korollar Sei G eine endlich Gruppe, sei $\rho: G \rightarrow GL(V)$

ein Darstellg. Dann gibt es G -invariante

Teilräume $V_i \subseteq V$, $i = 1, \dots, m$ so dass

die V_i irreduzibel sind, mit $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$.

Ist $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ eine andere Zerlegg. in

G -invariant Teilräume, W_i irreduzibel, so ist

$m=n$ und es gibt eine Permutatio $\omega \in S_{\dim(V)}$

mit $V_i \cong W_{w(i)}$ $i = 1, \dots, m$.

17

Bem. Die Zerlegung existiert nach §4.4 (Satz von Maschke) und §4.3. Der Rest folgt nun aus dem vorigen Theorem. $\square$

8. Erinnerung an Bsp §4.1 (c): G endlich Gruppe

$$C(G, \mathbb{C}) = \{ f: G \rightarrow \mathbb{C} \} \cong \mathbb{C}^{|G|}$$

$$\text{Darstellung mit } (gf)(a) = f(g^{-1}a) \quad \begin{array}{l} a, g \in G \\ f \in C(G, \mathbb{C}) \end{array}$$

Man nennt das die links-reguläre Darstellung von G .

Nach dem vorigen Satz gilt

$$C(G, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{i=1}^m V_i \quad V_i \text{ irreduzible Darstllg.}$$

Lemma Ist G eine endlich Gruppe, $\rho: G \rightarrow GL(V)$

eine irreduzible Darstllg. Dann gilt

$$V \cong V_i \quad (\text{als } G\text{-Modul}) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, m\},$$

$$C(G, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i=1}^m V_i$$

Inskesatz hat G bis auf Isomorphie nur endlich viele irreduzible Darstellungen.

Beis. Wir wählen $\xi: V \rightarrow \mathbb{C}$ linear mit $\xi \neq 0$ ($\xi \in V^*$ Linearform) und definieren

$$\Phi(v)(a) = \xi(g(a^{-1})v) \in \mathbb{C} \quad \begin{matrix} a \in G \\ v \in V \end{matrix}$$

Dann gilt $\Phi(v_1 + v_2)(a) = \Phi(v_1)(a) + \Phi(v_2)(a) \quad v_1, v_2 \in V$

$$\Phi(zv)(a) = z \Phi(v)(a) \quad z \in \mathbb{C}$$

(einsehen)

Insbesondere ist $\Phi(v): G \rightarrow \mathbb{C}$ ein Element von $C(G, \mathbb{C})$ $a \mapsto \Phi(v)(a)$

und die Abbildung $v \mapsto \Phi(v)$
 $V \rightarrow C(G, \mathbb{C})$ ist linear.

Beh. Φ ist ein Homomorphismus von G -Modulen.

Denn $(g \Phi(v))(a) = \Phi(v)(g^{-1}a) = \xi(g(a^{-1})g(g)v)$
 $= \Phi(g(g)v)(a)$, also $g \Phi(v) = \Phi(g(g)v)$. $\square$

Da $\Phi \neq 0$ (mit $\xi \neq 0$) und da $\ker(\Phi) \subseteq V$ ein Untermodul ist, folgt $\ker(\Phi) = \{0\}$,

$\Phi(v) \subseteq C(G, \mathbb{C})$ ist irreduzibles Untermodul.

Nach § 4.6 gilt $\Phi(v) \cong V_i$ für ein i .

$\square$

~~11~~

Die lin. reguläre Darstellung $C(G, \mathbb{C})$ "heißt"
 also alle irreduziblen Darstellungen von G . 119

g. Konstruktion Seien $\rho: G \rightarrow GL(V)$
 $\tau: G \rightarrow GL(W)$

Darstellungen der endlichen Gruppe G und sei

$T: V \rightarrow W$ eine beliebige lineare Abbildung.

Wir definieren $\tilde{T} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g) T \rho(g^{-1})$

Dann gilt (i) $\tilde{T}: V \rightarrow W$ ist ein Hom.
 von G -Moduln.

(ii) Falls T schon ein Hom. von G -Moduln ist,
 so ist $T = \tilde{T}$.

Bew. (i): Sei $h \in G$, z.z.: $\tilde{T} \rho(h) = \tau(h) \tilde{T}$.

$$\begin{aligned} \tilde{T} \rho(h) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g) T \rho(g^{-1} h) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(h) \tau(h^{-1} g) T \rho(g^{-1} h) = \tau(h) \tilde{T} \quad \square \end{aligned}$$

(ii): T Hom. von G -Moduln $\Rightarrow \tau(g) T \rho(g^{-1})$

$$= \tau(g g^{-1}) T = T \Rightarrow \tilde{T} = T \quad \square$$

10. Die Schur-Relationen

[I. Schur, russ.-dt. Mathematik, 1875 - 1941]

Erinn.: "Kronecker- δ " $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Sei G eine (endliche) Gruppe. Ist $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung und wählen wir eine Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von V , so erhält man eine Matrix $(\rho_{ij}(g))_{i,j=1}^n$ mit Matrixkoeffizienten $\rho_{ij}(g) \in \mathbb{C}(G, \mathbb{C})$

Satz (Schur) Seien $\rho: G \rightarrow GL(V)$ und $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ irreduzible Darstellungen der endlichen Gruppe G . Wir wählen Basen von V und W . Dann gilt folgendes für die Matrixkoeffizienten.

(a) Wenn V, W nicht isomorph sind, so ist

$$\sum_{g \in G} \rho_{ij}(g) \sigma_{kl}(g^{-1}) = 0$$

$$(b) \quad \sum_{g \in G} \rho_{ij}(g) \rho_{kl}(g^{-1}) = \frac{|G|}{\dim(V)} \cdot \delta_{il} \cdot \delta_{jk}$$

Beweis Sei $T: W \rightarrow V$ die lineare Abbildung
mit Matrix T_{rs} , $T_{rs} = \begin{cases} 1 & r=j, s=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann hat $\tilde{T}$ die Matrix-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ie} &= \frac{1}{|G|} \sum_g \sum_{r,s} \delta_{ir}(g) \cdot T_{rs} \cdot \sigma_{se}(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g \delta_{ij}(g) \sigma_{ke}(g^{-1}) \end{aligned}$$

Aber wenn $V \neq W$, dann ist $\tilde{T} = 0$ (§4.5).

Damit folgt (a).

Für (b) setz wir $V=W$, $\sigma=\rho$. Nach §4.5

ist $\tilde{T} = \lambda \cdot \text{id}_V$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, also

$$\tilde{T}_{ie} = \lambda \delta_{ie}. \quad \text{Es folgt}$$

$$|G| \cdot \lambda \cdot \delta_{ie} = \sum_g \delta_{ij}(g) \delta_{ke}(g^{-1})$$

$$\Rightarrow \sum_g \underbrace{\sum_i \delta_{ij}(g) \delta_{ki}(g^{-1})}_{\delta_{kj}(g^{-1}g) = \delta_{kj}} = |G| \cdot m \cdot \lambda \quad (m = \dim(V))$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\delta_{kj}}{m} \quad \text{und} \quad \sum_g \delta_{ij}(g) \delta_{ke}(g^{-1}) = \frac{\delta_{ie} \delta_{kj}}{m} |G|$$

□

11. Erinn. Die Spur einer $m \times m$ -Matrix A

$$\text{ist } \text{tr}(A) = \sum_i A_{ii}, \quad \text{Es folgt } \text{tr}(AB) \\ = \sum_{i,j=1}^m A_{ij} B_{ji} = \sum_{i,j=1}^m B_{ji} A_{ij} = \text{tr}(BA).$$

Ist also A invertierbar, so ist $\text{tr}(ABA^{-1})$

$$= \text{tr}(A^{-1}AB) = \text{tr}(B). \quad \text{Daher ändert sich}$$

die Spur bei einem Basiswechsel nicht, ist also

für jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ wohldefiniert.

Def Sei $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung.

Der Charakter von ρ ist die Abbildung

$$\chi_\rho: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \text{tr}(\rho(g)) \quad ; m = \dim V \\ = \sum_{i=1}^m \rho_{ii}(g).$$

Falls ρ irreduzibel ist, heißt χ_ρ irreduzibel.

Einfache Eigenschaften des Charakters.

(1) Isomorphe Darstellungen haben den gleichen Charakter.

Denn $\rho: G \rightarrow GL(V)$ und $\sigma: G \rightarrow GL(W)$

Darstellungen, $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus von

$$G\text{-Moduln} \Rightarrow f \circ \rho(g) = \sigma(g) \circ f$$

$$\Rightarrow f \circ \rho(g) \circ f^{-1} = \sigma(g) \Rightarrow \text{tr}(\rho(g)) = \text{tr}(\sigma(g)).$$

(2) Für alle $a, g \in G$ gilt

$$\chi_g(a) = \chi_g(gag^{-1}), \quad \text{denn}$$

$$\text{tr}(g(a)) = \text{tr}(g(g)g(a)g(g^{-1})).$$

(3) $\chi_g(e) = \text{tr}(\text{id}_V) = \dim(V)$

(4) Sind $g: G \rightarrow GL(V)$ sowie $\sigma: G \rightarrow GL(V)$

Darstellungen, so gilt $\chi_{g \oplus \sigma}(g) = \chi_g(g) + \chi_\sigma(g)$

(in Matrizen: $\left(\begin{array}{c|c} \rho_{ij}(g) & 0 \\ \hline 0 & \sigma_{kl}(g) \end{array} \right)$ hat $\text{Spur} \sum_i \rho_{ii}(g) + \sum_k \sigma_{kk}(g)$)

Lemma Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix mit

$A^l = \mathbb{1}$ für ein $l \geq 1$. Dann ist A diagonalisierbar

$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ und $\lambda_k^l = 1$ für alle k .

Bew. Setze $\xi_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{l} j\right)$, $j = 1, \dots, l$

$$\Rightarrow X^l - 1 = (X - \xi_1)(X - \xi_2) \dots (X - \xi_l)$$

Das Minimalpolynom von A teilt $X^l - 1$,

zerfällt also in Linearfaktoren der Multiplizität 1

$\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar (LA)

□

(5) Wenn G endlich ist, so gilt:

$$(5.1) |\chi_g(g)| \leq m = \dim(V) \quad m \neq 1$$

$$(5.2) |\chi_g(g)| = m \Leftrightarrow g(g) = \lambda \operatorname{id}_V \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$(5.3) \chi_g(g) = m \Leftrightarrow g(g) = \mathbb{1}.$$

Denn: g hat endliche Ordnung $\Rightarrow g(g) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

$$|\lambda_n| = 1 \Rightarrow \operatorname{tr}(g(g)) \leq m.$$

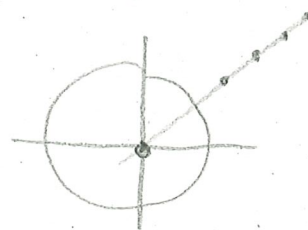
Wenn $|\lambda_1 + \dots + \lambda_m| = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_m|$, dann

liegen alle λ_k auf einem Strahl

$$\text{also } |\lambda_k| = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_m$$

$$\Rightarrow g(g) = \lambda_1 \operatorname{id}_V, \quad \operatorname{tr}(g(g)) = m \lambda_1$$

$$\text{Insbesondere: } \operatorname{tr}(g(g)) = m \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 1 \quad \square$$



(6) Ist $g: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung,

so ist die kontragradiente Darstellung

$$g^V: G \rightarrow GL(V^V) \quad V^V = \{ \xi: V \rightarrow \mathbb{C} \mid \xi \text{ linear} \}$$

$$\text{definiert durch } (g \xi)(v) = \xi(g(g^{-1})v)$$

(6.1) Wenn G endlich ist, so gilt

$$\chi_{g^V} = \overline{\chi_g} \quad (\text{komplex konjugiert})$$

$$\text{so wie } \chi_g(g^{-1}) = \overline{\chi_g(g)}$$

Dann: Es gibt eine Basis $u_1, \dots, u_m$ von V

mit $(g_{ij}(g)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$, $\chi_g(g) = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$

Definieren $\xi_k: V \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\xi_k(u_j) = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$g^V(g)(\xi_k) = \lambda_k^{-1} \xi_k = \bar{\lambda}_k \xi_k \Rightarrow \text{tr}(g^V(g)) = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_m.$$

□

#

12. Lemma (Schur - Orthogonalität)

Sei G eine endliche Gruppe, sei $\rho: G \rightarrow GL(V)$

und $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ irreduzible Darstellungen.

Dann gilt:

$$(a) \quad \sum_{g \in G} |\chi_\rho(g)|^2 = |G|$$

(b) Wenn V, W nicht isomorph sind, so ist

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_\sigma(g)} = 0$$

Beweis $\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^m \rho_{ii}(g)$ $\overline{\chi_\sigma(g)} = \chi_\sigma(g^{-1})$

$m = \dim(V)$ $= \sum_k \overline{\sigma_{kk}(g^{-1})}$

Jetzt benutzen wir die Schur - Relation § 4.10

Wenn $V \neq W$ (als G -Modul), dann

$$\sum_{g \in G} \delta_{ii}(g) \sigma_{hh}(g^{-1}) = 0, \text{ es folgt (b).}$$

$$\text{W\u00e4hlt man} \quad \sum_{g \in G} \delta_{ii}(g) \delta_{hh}(g^{-1}) = \frac{|G|}{n} \delta_{ih}^2$$

$$\Rightarrow \sum_{g \in G} \sum_{i,h=1}^n \delta_{ii}(g) \delta_{hh}(g^{-1}) = |G|$$

$$\Rightarrow \sum_{g \in G} \chi_g(g) \overline{\chi_g(g)} = |G| \quad \square$$

Folgerung: Sind δ, σ nicht-isomorph irreduzible

Darstellungen der \u00e4ndlichen Gruppe G , so ist $\chi_\delta \neq \chi_\sigma$.

13. Sei G eine \u00e4ndliche Gruppe. Wir definieren

f\u00fcr $f, h \in C(G, \mathbb{C})$

$$\langle f | h \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{h(g)}$$

$$\text{Dann gilt: } \langle f_1 + f_2 | h \rangle = \langle f_1 | h \rangle + \langle f_2 | h \rangle$$

$$\langle f | h_1 + h_2 \rangle = \langle f | h_1 \rangle + \langle f | h_2 \rangle$$

$$\langle f | h \rangle = \overline{\langle h | f \rangle}$$

$$\langle z f | h \rangle = z \langle f | h \rangle \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\langle f | z h \rangle = \overline{z} \langle f | h \rangle$$

$$\langle f | f \rangle \geq 0 \text{ und } \langle f | f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

d.h. $\langle - | - \rangle$ ist eine positiv definite hermitesche

Form auf $C(G, \mathbb{C})$.

Zusätzlich gilt für $g \in G$, $f, h \in C(G, \mathbb{C})$

$$\langle g f | g h \rangle = \langle f | h \rangle.$$

Die Schur-Orthogonalität läßt sich dann

schreiben wie folgt: sind $\rho: G \rightarrow GL(V)$ irreduzibel,
 $\sigma: G \rightarrow GL(W)$

G endlich, so gilt

$$\langle \chi_\rho | \chi_\sigma \rangle = \begin{cases} 1 & \text{wenn } V \cong W \\ 0 & \text{wenn } V \not\cong W. \end{cases}$$

Theorem Sei G eine endliche Gruppe, seien

$\rho: G \rightarrow GL(V)$ und $\sigma: G \rightarrow GL(W)$ Darstellungen.

Dann sind äquivalent:

(i) $\chi_\rho = \chi_\sigma$, die Charaktere sind gleich

(ii) Die Darstellungen ρ, σ sind isomorph

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i) nach § 4.11.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir schreiben $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m$

$\sigma = \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_n$ als Summe irreduzibler

Darstellungen ρ_i, σ_j (vgl. § 4.7).

Dann ist $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \dots + \chi_{\rho_m}$

$= \chi_\sigma = \chi_{\sigma_1} + \dots + \chi_{\sigma_n}$

Dann ist $\langle \chi_{g_k} | \chi_g \rangle = c_k = \langle \chi_{g_k} | \chi_g \rangle$

mit $c_k = \# \{ j \in \{1, \dots, n\} \mid \chi_{g_j} = \chi_{g_k} \}$
 $= \# \{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \chi_{g_i} = \chi_{g_k} \}$

Das gilt für jedes k , also $m=n$ und es gibt eine Permutation $\omega \in \text{Sym}(m)$ mit

$$\chi_{g_k} = \chi_{\sigma_{\omega(k)}} \quad k=1, \dots, m$$

Es folgt: $\rho_k : G \rightarrow GL(V_k)$ ist isomorph zu

$$\sigma_{\omega(k)} : G \rightarrow GL(W_{\omega(k)}), \quad V_k \cong W_{\omega(k)} \text{ und}$$

$$\text{damit } V = \bigoplus_{i=1}^m V_k \cong \bigoplus_{i=1}^m W_k \quad \square$$

Wir können damit die Struktur von $C(G, \mathbb{C})$ bestimmen.

14. Lemma Sei G eine endlich Gruppe, sei

$$\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{C}(G, \mathbb{C})) \text{ die linksreguläre}$$

Darstellung. Dann gilt $\chi_\rho(g) = 0$ für alle

$$g \neq e \quad \text{und} \quad \chi_\rho(e) = |G|.$$

Beweis Für $x \in G$ betrachte $\delta_x : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\delta_x(a) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x=a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\{\delta_x \mid x \in G\}$ eine Basis von $C(G, \mathbb{C})$. Für $g, a \in G$ ist

1129

$$(g\delta_x)(a) = \delta_x(g^{-1}a) = \delta_{gx}(a) \Rightarrow g\delta_x = \delta_{gx}.$$

Für $g \neq e$ folgt $g\delta_x \neq \delta_{gx} \neq \delta_x$, die Matrix

$$\rho(g) \text{ hat Einträge } \rho_{x,y}(g) = \begin{cases} 1 & gx = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{tr}(\rho(g)) = 0 \quad \text{für } g \neq e.$$

□

Theorem Sei G eine endliche Gruppe, seien

$\chi_{\rho_1}, \dots, \chi_{\rho_l}$ die Charaktere der irreduziblen

Darstellungen ρ_i von G , $\chi_{\rho_i} \neq \chi_{\rho_j}$ für $i \neq j$.

Sei m_i die Dimension von $\rho_i: G \rightarrow GL(V_i)$

Sei $\rho: G \rightarrow GL(C(G, \mathbb{C}))$ die linksreguläre

Darstellung. Dann gilt

$$\chi_\rho = \sum_{i=1}^l m_i \chi_{\rho_i} \quad \text{und folglich}$$

$$C(G, \mathbb{C}) \cong V_1^{m_1} \oplus V_2^{m_2} \oplus \dots \oplus V_l^{m_l}$$

$$\text{Insbesondere ist } |G| = \sum_{i=1}^l m_i^2.$$

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \langle \chi_s | \chi_{s_i} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_s(g) \overline{\chi_{s_i}(g)} \\
 &= \frac{1}{|G|} \chi_s(e) \chi_{s_i}(e) = \frac{1}{|G|} |G| \cdot m_i = m_i
 \end{aligned}$$

□

15. Def Eine Abbildung $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

Klassenfunktion, wenn für alle $a, g \in G$ gilt

$$f(a) = f(gag^{-1}). \quad \text{Erinnerung: die Konjugatklasse}$$

von $a \in G$ ist $C_G(a) = \{ gag^{-1} \mid g \in G \} \subseteq G$.

Klassenfunktionen sind also auf Konjugatklassen konstant. Der Vektorraum $cf(G) = \{ f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist Klassenfunktion} \}$ hat also Dimension

$$\dim(cf(G)) = | \{ C_G(a) \mid a \in G \} |$$

↑ Anzahl der Konjugatklassen.

Beobachtung: Jeder Charakter χ_s ist eine Klassenfunktion, vgl. § 4.11(2).

Die irreduziblen Charaktere $\chi_{s_1}, \dots, \chi_{s_e}$ einer endlich Gruppe bilden eine Orthogonalbasis

im Untervektorraum $U \subseteq C(G, \mathbb{C})$, der von den Charakteren erzeugt wird. Dann: Jeder Charakter ist eine Summe irreduzibler Charaktere und

$$\langle \chi_{g_i} | \chi_{g_j} \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Theorem Sei G eine endliche Gruppe, seien $\chi_{g_1}, \dots, \chi_{g_l}$ die irreduziblen Charaktere von G . Dann ist $\chi_{g_1}, \dots, \chi_{g_l}$ eine Orthonormalbasis des Raums $cf(G)$ der Klassenfunktionen.

Insbesondere ist $l = |\{C_G(a) \mid a \in G\}|$ die Anzahl der Konjugatenklassen von G .

Beweis: Sei $f \in cf(G)$. Wir zeigen: Wenn f orthogonal ist zu allen Charakteren, dann ist $f=0$. Dann folgt die Behauptung.

Angenommen, $\langle f | \chi_{g_i} \rangle = 0$, für $i=1, \dots, l$.

Betrachte $G \times C(G, \mathbb{C}) \rightarrow C(G, \mathbb{C})$. Wir definieren

$T: C(G, \mathbb{C}) \rightarrow C(G, \mathbb{C})$ durch

$$T = \sum_{g \in G} f(g) g^{-1}$$

Beh (a) T ist ein Hom. von G -Moduln.

Denn : für $h \in G$ ist $Th = \sum_g f(g) g^{-1} h$

$$= \sum_{g \in G} f(g) h \underbrace{h^{-1} g^{-1} h}_{= f(hgh^{-1})} = \sum_{g \in G} f(hgh^{-1}) h g = h T, \quad \square$$

Sei nun $W \subseteq C(G, \mathbb{C})$ irreduzibler Untermodul.

Wegen $g^{-1}W \subseteq W$ ist $T(W) \subseteq W$, sei

$T' = T|_W$ die Einschränkung von T auf W .

Es folgt $T' = \lambda \cdot \text{id}_W$ (vgl. §4.5),

also $\text{tr}(T') = \dim(W) \cdot \lambda$. Außerdem ist

$$\text{tr}(T') = \sum_{g \in G} f(g) \text{tr}(g(g^{-1})) = |G| \langle f | \chi_g \rangle = 0$$

für $g: G \rightarrow GL(W)$, also $T' = 0 \Rightarrow T = 0$.

$$\text{Jetzt } 0 = T \delta_e = \sum_g f(g) g^{-1} \delta_e$$

$$\delta_h(a) = \delta_{e,a} = \begin{cases} 1 & h=a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \sum_g f(g) \delta_{g^{-1}} \quad \text{und} \quad \{\delta_h \mid h \in G\} \text{ ist Basis}$$

$$\text{von } C(G, \mathbb{C}) \Rightarrow f = 0$$



$\square$ ~~✗~~

16. Ein Charakter ist also eindeutig bestimmt durch die Werte, die er auf den Konjugatenklassen $C_G(g) \subseteq G$ annimmt.

(*)

132 $\frac{1}{2}$

Es folgt $\text{span} \{ \chi_{s_i} \mid i=1, \dots, l \} = \text{cf}(G)$.

Denn : $f \in \text{cf}(G) \Rightarrow$ betrachte

$$f' = \sum_{i=1}^l \langle f \mid \chi_{s_i} \rangle \chi_{s_i} \in \text{span} \{ \chi_{s_i} \mid i=1, \dots, l \}$$

$$\text{und } \langle f - f' \mid \chi_{s_j} \rangle = \langle f \mid \chi_{s_j} \rangle - \langle f \mid \chi_{s_j} \rangle = 0$$

$$\text{für alle } j \Rightarrow f - f' = 0$$

□

Def Sei G eine endlich Gruppe, sei

$C_G(g) = \{e\}, C_G(g_2), \dots, C_G(g_e)$ die Konjugatenklassen, $g_1 = e$, $C_G(g_i) \neq C_G(g_j)$ für $i \neq j$.

Sei $\chi_1, \dots, \chi_e$ die irreduziblen Charaktere von

G χ_1 der Charakter der trivialen Darstellung (d.h.

$\chi_1(g) = 1$ für alle $g \in G$). Die Charaktertafel von

G ist die Tabelle mit Einträgen $\chi_i(g_j)$

	g_1	g_2	g_3	$\dots$	g_e
χ_1	1	1	1		1
χ_2	m_2				
$\vdots$	$\vdots$		$\chi_i(g_i)$		
χ_e	m_e				

$m_i = \dim(\rho_i)$ $\rho_i: G \rightarrow GL(V)$ mit $\chi_{\rho_i} = \chi_i$.

Diese Tabelle bestimmt also alle Darstellungen von G .

17. Beispiel (a) G eine endliche zyklische Gruppe,

$G = \langle a \rangle$, $o(a) = l$. Da G abelsch ist, ist

$C_G(a) = \{a\}$. Wir setzen $\xi = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{l}\right) \mapsto \langle \xi \rangle$

hat Ordnung l . Wir erhalten l verschiedene 1-dimensionalen

Darstellungen $\rho_1, \dots, \rho_l : G \rightarrow GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ durch

$$\rho_k(a) = \xi^{k-1}, \quad \rho_k(a^m) = \xi^{m(k-1)}, \quad \chi_k = \chi_{\rho_k}$$

$\rho_1(a) = 1$ triviale Darstellung.

	e	a	a ²	a ³	...	a ^{l-1}
χ_1	1	1	1	1	...	1
	1	ξ	ξ^2	ξ^3	...	ξ^{l-1}
	1	ξ^2	ξ^4	...		
χ_l	1	ξ^{l-1}	...	...	...	$\xi^{(l-1)(l-1)}$

Charaktertafel für
 $G = \langle a \rangle$, $o(a) = l$.

Das sind alle irreduziblen Darstellungen, weil $\dim \mathbb{C}(G, \mathbb{C}) = |G| = l$.

(b) $G = \text{Sym}(3)$ Jedes Element $g \in \text{Sym}(3)$

ist konjugiert zu id , $(1,2)$ oder $(1,2,3)$,

(etwa: (wähle $\sigma \in \text{Sym}(3)$ mit $\sigma(i) = 1$, $\sigma(j) = 2$

für $i \neq j$ $\Rightarrow \sigma(i,j)\sigma^{-1} : \begin{cases} 1 \mapsto i \mapsto j \mapsto 2 \\ 2 \mapsto j \mapsto i \mapsto 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \sigma(i,j)\sigma^{-1} = (1,2)$ usw.

Irreduzible Darstellungen

ρ_1 : triviale Darstellung

ρ_2 : $g \mapsto \text{sign}(g) \in \text{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ 1-dim, irreduzibel

ρ_3 : $V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$, $\dim(V) = 2$

$\text{Sym}(3)$ wirkt durch $\rho_3(g)(z_1, z_2, z_3) = (z_{g(1)}, z_{g(2)}, z_{g(3)})$

Diese Darstellung ρ_3 ist irreduzibel, denn ein echter invarianter Teilraum müsste 1-dimensional sein, also ein Eigenraum für alle $\rho_3(g)$, $g \in \text{Sym}(3)$. Aber

$(1, 2)$ hat Eigenvektoren $(1, -1, 0)$ sowie $(1, 1, -2)$

$(1, 3)$ hat Eigenvektoren $(1, 0, -1)$ sowie $(1, -2, 1)$

Da $|G| = 6 = 1 + 1 + 2^2$ sind das alle irreduziblen Darstellungen (bis auf Isomorphie).

Wir haben $\chi_{\rho_1}(g) = \rho_1(g)$ u.d. $\chi_{\rho_2}(g) = \rho_2(g)$.

Um χ_{ρ_3} zu bestimmen, nehmen wir die Basis

$$\begin{aligned} (1, -1, 0) \quad v_1 &= (1, -1, 0) \quad \checkmark \text{ von } V \\ (1, 0, -1) \quad v_2 &= (1, 0, -1) \end{aligned}$$

$$\rho_3(12)v_1 = -v_1$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3(12)v_2 = (0, 1, -1) = v_2 - v_1$$

$$\text{tr} = 0$$

$$\rho_3(123)v_1 = (-1, 0, 1) = -v_2$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3(123)v_2 = (0, -1, 1) = v_1 - v_2$$

$$\text{tr} = -1$$

* Ein besserer Beweis der Berechnung von χ_3 135 $\frac{1}{2}$
(vgl. Vorlesung!)

$$\mathbb{C}^3 = V \oplus W \quad W = \text{span}\{(1,1,1)\} \quad \begin{array}{l} 1\text{-dim} \\ \text{invariant} \\ \text{Darstellung} \end{array}$$

$$\text{also line. Sit.} = \chi_1 + \chi_3 \quad \chi_1 = 1$$

$$(1,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{hat } \underline{\text{Spur } 1} \Rightarrow \chi_{\mathcal{S}_2}(1,2) = 0$$

$$(1,2,3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat } \underline{\text{Spur } 0} \Rightarrow \chi_{\mathcal{S}_3}(1,2,3) = -1$$

Wir erhalten folgende Charaktertafel für $\text{Sym}(3)$ 136

	id	(1,2)	(1,2,3)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

18. Lemma (Eigenschaften der Charaktertafel)

Sei G eine endliche Gruppe, sei $\chi_1, \dots, \chi_r$ die irreduziblen Charaktere von G , $\chi_i \neq \chi_j$ für $i \neq j$.

Sei $C_G(g_1), \dots, C_G(g_l)$ die l Konjugatklasse von G . OE $g_1 = e$ und χ_1 der Charakter der trivialen Darstellung, $\chi_1(g) = 1$ für alle $g \in G$.

Sei M die Charaktertafel von G , d.h. $M \in \mathbb{C}^{l \times r}$,

$M_{ij} = \chi_i(g_j)$, sei D die Diagonalmatrix

mit Einträgen $D_{ii} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)|}$. Dann gilt

$$M^* M = D$$

(Daher ist M^* die komplex-transponierte Matrix, d.h.

$$(M^*)_{ij} = \overline{M_{ji}}).$$

Beweis Wir haben $\langle \chi_i | \chi_j \rangle = \delta_{ij}$, also

$$\sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} = |G| \cdot \delta_{ij} \quad \text{Wird in}$$

$$\sum_{g \in C_G(g_k)} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} = |C_G(g_k)| \chi_i(g_k) \overline{\chi_j(g_k)}$$

$$\text{Damit} \quad \sum_k M_{ik} \frac{|C_G(g_k)|}{|G|} \overline{M_{jk}} = \delta_{ij}$$

$$\text{oder} \quad M D^{-1} M^* = \mathbb{1} \Rightarrow \underline{D^{-1} M^* M} = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow M^* M = D.$$



Für $\text{Sgn}(3) = G$ also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|C_G(12)| = 3 \quad |C_G(1,2,3)| = 2 \quad (\checkmark)$$

Für $G = \langle a \rangle$, $o(a) = l$ ist

$$M_{ij} = \zeta^{(i-1)(j-1)}, \quad \zeta = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{l}\right), \text{ also}$$

$$(M^* M)_{ij} = \sum_{k=1}^l \zeta^{-(i-1)(k-1)} \zeta^{(k-1)(j-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^l \zeta^{(k-1)(j-i)} = \begin{cases} \frac{\zeta^{l(j-i)} - 1}{\zeta^{j-i} - 1} = 0 & i \neq j \\ l & i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow M^* M = l \mathbb{1} \quad (\checkmark)$$

19. Satz Sei G eine endlich Gruppe. Eine Darstellung $\rho: G \rightarrow GL(V)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = 1$ gilt.

Beweis Sei $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, $\rho_i: G \rightarrow GL(V_i)$ irreduzibel, vgl. §4.4 (Satz von Maschke)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \chi_\rho &= \chi_{\rho_1} + \dots + \chi_{\rho_m}, \quad \langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = \sum_{k=1}^m \underbrace{\langle \chi_{\rho_k} | \chi_{\rho_k} \rangle}_{=1} \\ &+ \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq m} 2 \langle \chi_{\rho_i} | \chi_{\rho_j} \rangle}_{\geq 0} \geq m. \quad \text{Also: } \langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = 1 \Rightarrow m = 1 \\ &\Rightarrow \rho \text{ irreduzibel.} \quad \square \end{aligned}$$

20. Lemma Sei K, H endlich Gruppen, $G = K \times H$.

Sei $\rho: K \rightarrow GL(\mathbb{C}^m)$ sowie $\sigma: H \rightarrow GL(\mathbb{C}^n)$ Darstellungen. Dann hat die Darstellung $\tau: G \rightarrow GL(\mathbb{C}^{m \times n})$ die Charaktere $\chi_\tau(a, b) = \chi_\rho(a) \chi_\sigma(b)$, $a \in K$, $b \in H$

wobei $\tau(a, b)(X) = \rho(a) X \sigma(b)^T$, $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$

Beweis Sei $E(r, s) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $E(r, s)_{ij} = \begin{cases} 1 & r=i, s=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$(\rho(a) E(r, s) \sigma(b)^T)_{ij} = \rho_{ir}(a) \sigma_{js}(b)$$

$$\Rightarrow \text{tr}(\tau(a, b)) = \sum_{r,s} \rho_{rr}(a) \sigma_{ss}(b) = \text{tr}(\rho(a)) \text{tr}(\sigma(b)). \quad \square$$

#

Satz Seien K, H endlich Gruppen, $G = K \times H$.

Seien $\chi_{\sigma_1}, \dots, \chi_{\sigma_l}$ die irreduziblen Charaktere von K

und $\chi_{\tau_1}, \dots, \chi_{\tau_m}$ die irreduziblen Charaktere von H .

Dann sind $\chi_{\sigma_i \times \tau_j}$ die irreduziblen Charaktere von G ,

$i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m$.

Beweis $\langle \chi_{\sigma_i \times \tau_j} | \chi_{\sigma_i \times \tau_j} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{a \in K \\ b \in H}} \chi_{\sigma_i(a)} \chi_{\tau_j(b)} \overline{\chi_{\sigma_i(a)}} \overline{\chi_{\tau_j(b)}}$

$= \langle \chi_{\sigma_i} | \chi_{\sigma_i} \rangle \langle \chi_{\tau_j} | \chi_{\tau_j} \rangle = 1 \Rightarrow$ die Charaktere

$\chi_{\sigma_i \times \tau_j}$ sind irreduzibel nach §4.19. Die zugehörige

Darstellung $\sigma_i \times \tau_j$ hat Dimension $n_i \cdot n_j$ $\sigma_i: K \rightarrow GL(\mathbb{C}^{n_i})$
 $\tau_j: H \rightarrow GL(\mathbb{C}^{n_j})$

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (n_i \cdot n_j)^2 = \sum_{i=1}^l n_i^2 \sum_{j=1}^m n_j^2 = |K| \cdot |H| = |G|$$

$= \dim \mathbb{C}(G, \mathbb{C})$, Also fehlt kein irr. Charakter. $\square$

Mit Hilfe des Satzes lassen sich Charaktertabelle von Produkten $G = K \times H$ bestimmen, wenn man die Charaktertabelle von K, H kennt.

Zum Abschluss wollen wir die Charaktere der symmetrischen Gruppe $Sym(m)$ bestimmen.

*

199 $\frac{1}{2}$

Genauso folgt

$$\langle \chi_{\mathbf{S}_i \times \sigma_i} | \chi_{\mathbf{S}_j \times \sigma_j} \rangle = \delta_{i,j} \cdot \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \text{ damit}$$

sind die $\chi_{\mathbf{S}_i \times \sigma_i}$ paarweise verschieden.

21. Erinnerung an § 3.12. Sind $c_1, \dots, c_k \in X = \{1, \dots, m\}$ mit $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$, $k \geq 2$, so ist der

Zykel $\tau = (c_1, \dots, c_k)$ die Permutation $\tau \in \text{Sym}(m)$

$$\tau: \begin{cases} c_i \mapsto c_{i+1} & i = 1, \dots, k-1 \\ c_k \mapsto c_1 \\ x \mapsto x & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir nennen zwei Zykeln $\tau = (c_1, \dots, c_k)$, $\sigma = (d_1, \dots, d_\ell)$ disjunkt, wenn $c_i \neq d_j$ für alle i, j .

Die Ordnung von $\tau = (c_1, \dots, c_k)$ ist $o(\tau) = k$.

Wenn τ, σ disjunkte Zykeln sind, dann gilt $\tau\sigma = \sigma\tau$.

Beachte auch: $(c_1, c_2, \dots, c_k) = (c_2, c_3, \dots, c_k, c_1)$ usw.

Satz Sei $\alpha \in \text{Sym}(m)$, $\alpha \neq \text{id}$. Dann läßt sich α eindeutig schreiben als ein Produkt von disjunkten Zykeln, $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_r$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ Zykeln, disjunkt.

Bew. Betrachte $A = \langle \alpha \rangle \leq \text{Sym}(m)$.

Seien $X_1, \dots, X_r \in X = \{1, \dots, m\}$ die Bahnen von A mit Länge $|X_j| \geq 2$. Wähle $x \in X_j$, also $X_j = \{x, \alpha x, \alpha^2 x, \dots, \alpha^{u_j-1} x\}$

$|X_j| = u_j$, $\alpha^{u_j} x = x \leadsto$ Zykel

$$\alpha_j = (x, \alpha x, \alpha^2 x, \dots, \alpha^{u_j-1} x)$$

Für $w \in X_i$ folgt $\alpha_i w = \alpha w$, für $w \in X - X_i$ ist $\alpha_i w = w$. Also $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ Produkt von

Disjunkten Zykeln.

Ist $\alpha = \beta_1 \cdots \beta_s$ ein Produkt von disjunkten Zykeln, $\beta_j = (c_{i_1}, \dots, c_{i_j})$ so ist die A-Dauer

von c_{i_1} genau $\{c_{i_1}, \dots, c_{i_j}\} \mapsto \{c_{i_2}, \dots, c_{i_j}\} = X_i$

so $\beta_j = \alpha_i \rightarrow l = n$ und es gibt eine Permutation

ω mit $\beta_j = \alpha_{\omega(j)}$. □

Ist $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ Produkt disjunkter Zykeln, so

läßt man annehmen, dass $\underbrace{O(\alpha_1)}_{=n_1} \geq \underbrace{O(\alpha_2)}_{=n_2} \geq \dots \geq \underbrace{O(\alpha_r)}_{=n_r}$

Die Folge $(n_1, \dots, n_r)$ heißt der Zykel-Typ von α .

22. Lemma Zwei Elemente $\alpha, \beta \neq \text{id}$ in $\text{Sym}(m)$ sind genau dann konjugiert in $\text{Sym}(m)$ (d.h. es gibt $\omega \in \text{Sym}(m)$ mit $\omega \alpha \omega^{-1} = \beta$), wenn α, β den gleich Zykel-Typ haben.

Beweis Sei $\gamma = (c_1, \dots, c_n)$ ein Zykel, sei

$\omega \in \text{Sym}(m)$. Dann gilt $\omega \gamma \omega^{-1}(\omega c_i)$

$$= \omega \gamma(c_i) = c_{i+1} \Rightarrow \omega \gamma \omega^{-1} = (\omega c_1, \omega c_2, \dots, \omega c_n)$$

Wenn also α, β den gleich Zykel-Typ haben,

$$\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_r$$

$$\beta = \beta_1 \cdots \beta_r$$

$$O(\alpha_i) = O(\beta_i) = n_i, \text{ dann}$$

$$n_1 \geq \dots \geq n_r$$

gibt es. $w \in \text{Sym}(m)$ so, dass w

$$w \alpha_i w^{-1} = \beta_i \quad i = 1, \dots, r.$$

Umgekehrt: $w \alpha w^{-1} = \beta \Rightarrow w \alpha_i w^{-1} = \beta_i, i = 1, \dots, r$ die gleiche

$$\text{Zykel und } \beta = w \alpha_1 w^{-1} \cdot w \alpha_2 w^{-1} \cdots w \alpha_r w^{-1}. \quad \square$$

In der Zerlegung $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ mit Zykel-Typ

$$u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_r \quad \text{gilt} \quad u_1 + u_2 + \dots + u_r \leq m \quad \text{und}$$

$m - (u_1 + \dots + u_r)$ ist die Anzahl der Fixpunkte von α

(Fixpunkt = Bahn des Längs 1). Der erweiterte

$$\text{Zykel-Typ ist } [u_1, \dots, u_r, \underbrace{1, \dots, 1}_{m - (u_1 + \dots + u_r)}] = [u_1, \dots, u_r]$$

Dann ist $u_1 + u_2 + \dots + u_r = m, u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_r$.

Das ist ein Zerlegung von m . Der erweiterte

$$\text{Zykel-Typ von id ist } [\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m].$$

Korollar Zwei Elemente $\alpha, \beta \in \text{Sym}(m)$ sind

genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen

erweiterten Zykel-Typ haben. Insbesondere

entsprechen die Konjugatsklassen in $\text{Sym}(m)$

genau den Zerlegungen von m .

Korollar Die Zerlegung von n
 paramitisiert genau die induzierte Darstellung
 von $Sym(n)$ (bis auf Isomorphismen)

Bsp $n=2 \rightsquigarrow [1,1] \text{ und } [2]$
 $n=3 \rightsquigarrow [1,1,1], [2,1], [3]$
 $n=4 \rightsquigarrow [1,1,1,1], [2,2,1], [2,2], [3,1], [4]$

Die Zerlegung versteht man mit Young-Diagrammen. Das Young-Diagramm von $[u_1, \dots, u_r]$ hat r Zeilen mit jeweils u_j Kästchen, etwa

$[3, 2, 2, 1] \rightsquigarrow$



Zeilen

Young-Diagramm

「A Young, brit. Math., 1873 - 1940」

Die Young-Diagramme sind die Zerlegung von n
 paramitisiert also die induzierte Darstellung von
 $Sym(n)$.

Die zugehörig induzierte Darstellung von
 $\text{Sym}(n)$ sind die Specht-Module

┌ W. Specht, dt. Math., 1907-1985 ┐

Ihre Beschreibung ist recht kombinatorisch, vgl.

P. Diaconis, Group Representations in
Probability and Statistics, Ch. 7

