Prof. Dr. Linus Kramer
Sira Busch

Wintersemester 25/26
Universität Münster

Endliche Gruppen
Blatt 12

Abgabe: 22.01.2026, 08:00 in Briefkasten 5

Bitte nehmen Sie sich zuerst ein paar Minuten Zeit für die Evaluation der Veranstaltung im Learnweb.

Aufgabe 1.
Zeigen Sie, dass die irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe genau dann 1-dimensional sind, wenn die Gruppe abelsch ist.

Aufgabe 2.
Es sei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{T}$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation von komplexen Zahlen.
(ii) Für jede Gruppe G ist die Menge $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ aller Homomorphismen von G nach $\mathbb{T}$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Verknüpfung $(\alpha \cdot \beta)(g) = \alpha(g)\beta(g)$.
(iii) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{T}) \cong \mathbb{T}$.
(iv) Ist G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung m, dann ist auch $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung m.

Aufgabe 3.
Sie $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine m-dimensionale irreduzible Darstellung und sei $v \in V$, $v \neq 0$. Zeigen Sie: es gibt Elemente $g_1, \ldots, g_{m-1} \in G$ so, dass $v, \rho(g_1)v, \ldots, \rho(g_{m-1})v$ eine Basis von V ist.
[Hinweis: Zeigen Sie, dass die Menge $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.]

Der *Charakter* einer Darstellung $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ ist die Abbildung $\chi_\rho\colon G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g))$, wobei tr die Spur ist.

Aufgabe 4.
Es seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^m)$ und $\sigma : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ Darstellungen. Zeigen Sie:

(i) $G \times \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{m\times n}$, $(g, A) \mapsto \rho(g)A\sigma(g)^T$ ist eine mn-dimensionale Darstellung. (Dabei ist X^T die transponierte Matrix.)
(ii) Der Charakter dieser Darstellung ist $\chi_\rho \cdot \chi_\sigma$.

$*$-Aufgabe 5.
Es sei G eine Gruppe und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung. Zeigen Sie:

(i) $\dim(\mathrm{Hom}_G(V, V^m)) = m$.
(ii) $\dim(\mathrm{Hom}_G(V^n, V)) = n$.
(iii) $\dim(\mathrm{Hom}_G(V^n, V^m)) = mn$.