Prof. Dr. Linus Kramer
Sira Busch

Wintersemester 25/26
Universität Münster

# Endliche Gruppen
## Blatt 11

Abgabe: 15.01.2026, 08:00 in Briefkasten 5

In den Aufgaben 1 – 3 sind die Vektorräume komplex.

**Aufgabe 1.**
Sei $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe $G$, sei $g \in G$. Zeigen Sie: alle Eigenwerte von $\rho(g)$ haben Betrag 1.

**Aufgabe 2.**
Sei $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung und sei

$$\mathrm{End}_G(V) := \{f\colon V \to V \mid f \text{ linear und } \rho(g)f = f\rho(g) \text{ für alle } g \in G\}.$$

Zeigen Sie: $\mathrm{End}_G(V) = \{z\,\mathrm{id}_V \mid z \in \mathbb{C}\}$.
[Hinweis: Betrachten Sie die Eigenräume von $f \in \mathrm{End}_G(V)$.]

**Aufgabe 3.**
Es sei $F$ ein beliebiger Körper und $V = F^2$. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ 3-fach transitiv auf $PV$ wirkt.

**Aufgabe 4.**
Beweisen Sie, dass $\mathrm{Alt}(n)$ der einzige Normalteiler $N$ von $\mathrm{Sym}(n)$ ist mit $N \neq \{id\}, \mathrm{Sym}(n)$, für $n \neq 1, 2, 4$.

**Definition.** Sei $G \times X \to X$ eine Wirkung. Eine Teilmenge $B$ von $X$ wird *Imprimitivitätsblock der Wirkung* genannt, wenn gilt:
(a) $|B| \geq 2$.
(b) $B \neq X$.
(c) Für $g \in G$ ist $g(B) = B$ oder $g(B) \cap B = \varnothing$.

**$*$-Aufgabe 5.**
Sei $G \times X \to X$ eine transitive Wirkung. Zeigen Sie, dass diese Wirkung genau dann primitiv ist, wenn kein Imprimitivitätsblock existiert.
[Hinweis: Betrachten Sie $H = \{h \in G \mid h(B) = B\}$.]