Prof. Dr. Linus Kramer
Sira Busch

Wintersemester 25/26
Universität Münster

Endliche Gruppen
Blatt 10

Abgabe: 08.01.2026, 08:00 in Briefkasten 5

Aufgabe 1.
Es sei $G \times X \to X$ eine primitive Wirkung und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie: N wirkt transitiv auf X, oder N liegt im Kern der Wirkung.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Sym}(3)$.
(ii) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathrm{Alt}(4)$.

[Hinweis: wieviele Elemente hat der projektive Raum PV in diesen Fällen?]

Aufgabe 3.
Es sei G eine Gruppe und $H \subsetneq G$ eine Untergruppe. Weiter sei $g \in G$, $g \notin H$. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind.

(a) $G = H \cup HgH$.
(b) Die Wirkung $G \times G/H \to G/H$, $(g, aH) \mapsto gaH$ ist 2-fach transitiv.

Aufgabe 4.
Es sei $G \times X \to X$ eine Wirkung und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Weiter sei

$$\mathrm{Fix}_H(X) = \{u \in X \mid hu = u \text{ für alle } h \in H\}$$

die Menge der Fixpunkte von H. Zeigen Sie: für alle $y \in \mathrm{Fix}_H(X)$ und $g \in \mathrm{Nor}_G(H)$ gilt $gy \in \mathrm{Fix}_H(X)$.

$*$-Aufgabe 5.
Eine Wirkung $G \times X \to X$ heißt k-fach transitiv, wenn $|X| \geq k$ und wenn es zu zwei k-Tupeln $(x_1, \ldots, x_k), (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k) \in X^k$ mit $x_i \neq x_j$ und $\tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j$ für $i \neq j$ stets ein $g \in G$ gibt mit $gx_1 = \tilde{x}_1, \ldots, gx_k = \tilde{x}_k$.

Zeigen Sie: $\mathrm{Sym}(m)$ wirkt k-fach transitiv auf $X = \{1, \ldots, m\}$ für alle $1 \leq k \leq m$ und $\mathrm{Alt}(m)$ wirkt k-fach transitiv auf X für alle $1 \leq k \leq m-2$ und $m \geq 4$.