Prof. Dr. Linus Kramer
Sira Busch

Wintersemester 25/26
Universität Münster

Endliche Gruppen
Blatt 9

Abgabe: 18.12.2025, 08:00 in Briefkasten 5

Aufgabe 1.
Es sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie: G/N ist genau dann abelsch, wenn $N \supseteq DG$ gilt.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie: wenn G einfache, auflösbare Gruppe ist, dann ist G isomorph zu einer zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p.

Aufgabe 3.
Es sei G eine Gruppe. Wir definieren $D^0G = G$, $DG = \langle [g,h] \mid g,h \in G \rangle$ und rekursiv $D^{k+1}G = D(D^kG)$. Zeigen Sie folgendes.

(i) Wenn es ein $k \geq 0$ gibt mit $D^kG = \{e\}$, dann ist G auflösbar.
(ii) Wenn G auflösbar ist, dann gibt es ein $k \geq 0$ mit $D^kG = \{e\}$.

Aufgabe 4.
Es sei G eine endliche abelsche Gruppe und d sei ein Teiler der Ordnung n von G. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe H der Ordnung d hat.

$*$-Aufgabe 5.
Es sei N ein Normalteiler in der Gruppe G. Zeigen Sie: G is genau dann auflösbar, wenn G/N und N auflösbar sind.