Prof. Dr. Linus Kramer Wintersemester 25/26
Sira Busch Universität Münster

Endliche Gruppen
Blatt 8

Abgabe: 11.12.2025, 08:00 in Briefkasten 5

Aufgabe 1.
Für $a = \pm 1$ und $t \in \mathbb{Z}$ sei $\phi_{a,t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung $\phi_{a,t}(x) = ax + t$. Weiter sei $D = \{\phi_{a,t} \mid a = \pm 1, t \in \mathbb{Z}\}$. Wenn $a = 1$ ist, heisst $\phi_{a,t}$ Translation oder Verschiebung, wenn $a = -1$ ist, heisst $\phi_{a,t}$ Spiegelung (warum? — zeichnen Sie ein Bild). Zeigen Sie:

(a) D ist eine Gruppe und die Translationen bilden einen Normalteiler $T \trianglelefteq D$, mit $[D : T] = 2$.
(b) D ist unendlich und wird von 2 geeigneten Elementen erzeugt.
(c) In D gibt es Elemente endlicher Ordnung, deren Produkt keine endliche Ordnung hat.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie:

(i) Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist nicht endlich erzeugt.
(ii) Die Gruppe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ ist ebenfalls nicht endlich erzeugt, aber jedes $h \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hat endliche Ordnung.

Aufgabe 3.
Sei p eine Primzahl. Die *p-Prüfergruppe* ist $\mathbb{Z}(p^\infty) = \{z \in \mathbb{T} \mid \text{ es gibt } n \text{ mit } z^{p^n} = 1\}$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ ist eine unendliche abelsche Gruppe.
(ii) Jede echte Untergruppe $H \subsetneq \mathbb{Z}(p^\infty)$ ist endlich.
(iii) Wenn $H, K \subseteq \mathbb{Z}(p^\infty)$ Untergruppen sind, so gilt $H \subseteq K$ oder $K \subseteq H$.

Aufgabe 4.
Es sei Q die Gruppe, die von den komplexen Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ erzeugt wird, mit $i = \sqrt{-1}$. Bestimmen Sie die Ordnung von Q, das Zentrum Z von Q und zeigen Sie, dass die Gruppe Q/Z abelsch ist.

$*$-Aufgabe 5.
Es sei G eine endliche Gruppe mit Zentrum Z. Zeigen Sie: wenn $[G : Z] \leq 3$ gilt, dann ist G abelsch.