Prof. Dr. Linus Kramer
Sira Busch

Wintersemester 25/26
Universität Münster

Endliche Gruppen
Blatt 7

Abgabe: 04.12.2025, 08:00 in Briefkasten 5

Aufgabe 1.
Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung p^2q eine Sylow-p-Untergruppe oder eine Sylow-q-Untergruppe enthalten muss, die normal ist.

Aufgabe 2.
Es sei G eine abelsche Gruppe mit Untergruppen $A, B, C \subseteq G$. Weiter sei $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \{e\}$. Beweisen oder widerlegen Sie: $G \cong A \times B \times C$.

Definition. Eine nichttriviale Gruppe G wird *einfach* genannt, falls ihre einzigen Normalteiler G und $\{e\}$ sind, wobei e das Neutralelement in G bezeichnet.

Aufgabe 3.
Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 168. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 7 in G.

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass es keine einfachen Gruppen der Ordnung 40, 56, 200 oder 700 gibt, indem Sie zeigen, dass mindestens eine Sylow-p-Gruppe normal ist.

$*$-Aufgabe 5.
Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie: wenn für jede Primzahl p, die $|G|$ teilt, genau eine Sylow-p-Gruppe in G existiert, dann ist die Gruppe G isomorph zum Produkt ihrer Sylow-p-Gruppen, wobei p alle Primzahlen durchläuft, die $|G|$ teilen.