

Endliche Gruppen

Blatt 6

Abgabe: 27.11.2025, 08:00 in Briefkasten 5

Aufgabe 1.

Sei $f : G \rightarrow K$ ein Homomorphismus zwischen Gruppen G und K , und sei $L \subseteq K$ eine Untergruppe. Zeigen Sie:

- (i) Das Urbild $H = f^{-1}(L) = \{g \in G \mid f(g) \in L\}$ ist eine Untergruppe von G .
- (ii) Falls L normal ist in K , so ist auch H normal in G .

Aufgabe 2.

Es sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Bestimmen Sie das Zentrum der Heisenberggruppe $\text{Heis}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$

Aufgabe 3.

Es seien A, B Untergruppen einer Gruppe G . Zeigen Sie, dass $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ genau dann eine Untergruppe ist, wenn $AB = BA$ gilt.

Aufgabe 4.

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 12$. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Zahlen $u = |\text{Syl}_2(G)|$ und $v = |\text{Syl}_3(G)|$. Für welche Kombinationen (u, v) kennen Sie Beispiele von Gruppen?

*-Aufgabe 5.

Sei G eine p -Gruppe. Zeigen Sie: Jede Untergruppe H von G vom Index p ist ein Normalteiler.

[Hinweis: Induktion nach m , für $|G| = p^m$.]