Prof. Dr. Linus Kramer
Sira Busch

Wintersemester 25/26
Universität Münster

Endliche Gruppen
Blatt 5

Abgabe: 20.11.2025, 08:00 in Briefkasten 5

Aufgabe 1.
Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie:

(i) H wirkt auf G durch die Abbildung $H \times G \to G$, $(h,g) \mapsto hg$.
(ii) Die Bahnen der Wirkung sind genau die Rechtsnebenklassen von H.
(iii) Aus der Bahnengleichung folgt der Satz von Lagrange (wenn G endlich ist).

Aufgabe 2.
Es sei p eine Primzahl und G eine p-Gruppe, die auf einer endlichen Menge X wirkt. Wir nennen $z \in X$ einen Fixpunkt, wenn $gz = z$ für alle $g \in G$ gilt. Zeigen Sie:

(i) Wenn p kein Teiler von $|X|$ ist, dann gibt es mindestens einen Fixpunkt.
(ii) Wenn p ein Teiler von $|X|$ ist, dann gibt es entweder keinen oder mindestens zwei Fixpunkte.

Aufgabe 3.
Es sei $G \times X \to X$ eine transitive Wirkung der Gruppe G auf der Menge X. Weiter sei $u \in X$ und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie: H wirkt genau dann transitiv auf X, wenn gilt $G = G_u H$.

Aufgabe 4.
Es sei G eine Gruppe mit Normalteilern $M, N \trianglelefteq G$. Zeigen Sie: falls gilt $M \cap N = \{e\}$, so folgt $mn = nm$ für alle $m \in M$, $n \in N$.

$*$-Aufgabe 5.
Sei G eine Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem und A eine endliche Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der Gruppenhomomorphismen

$$\mathrm{Hom}(G, A) := \{\varphi \colon G \to A \mid \varphi \text{ ist Gruppenhomomorphismus}\}$$

endlich ist.
(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Dann hat G nur endlich viele Untergruppen von Index $[G : H] = n$.

[Hinweis: Für eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit $[G : H] = n$ betrachte die Wirkung von G auf den Nebenklassen von H in G und verwende Teil (a).]