Prof. Dr. Linus Kramer
Sira Busch

Wintersemester 25/26
Universität Münster

Endliche Gruppen
Blatt 2

Abgabe: 30.10.2025, 08:00 in Briefkasten 5

Aufgabe 1.
Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass $H \subseteq G$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $H \neq \varnothing$ und wenn für alle $u, v \in H$ gilt, dass $u \cdot v \in H$.

Aufgabe 2.
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien $H, K \subseteq G$ Untergruppen. Zeigen Sie: wenn $K \cup H$ eine Untergruppe ist, dann ist $K \subseteq H$ oder $H \subseteq K$.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie: jede Untergruppe H von $(\mathbb{Z}, +)$ ist von der Form $H = m\mathbb{Z}$, für ein $m \in \mathbb{N}$.
[Hinweis: Wenn $H \neq \{0\} = 0\mathbb{Z}$, dann existiert $m = \min\{h \in H \mid h > 0\}$. Dann weiter mit Teilen mit Rest.]

Aufgabe 4.
Seien G eine Gruppe und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit Index $[G : H] = 2$. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist.

$*$-Aufgabe 5.
Bestimmen Sie alle Normalteiler N der Gruppe $\mathrm{Sym}(3) = \mathrm{Sym}(\{1, 2, 3\})$.
[Hinweis: Wenn ein Normalteiler N eines der drei Elemente α, β, γ aus §1.4 enthält, dann ist schon $N = G$ – warum?]

Großbuchstabe	Kleinbuchstabe	Name
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi
P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ, ς	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega