

Endliche Gruppen

Blatt 1

Abgabe: 23.10.2025, 08:00 in Briefkasten 5

Aufgabe 1.

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass $H \subseteq G$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $H \neq \emptyset$ und für alle $u, v \in H$ gilt, dass $u^{-1} \cdot v \in H$.

Aufgabe 2.

Beweisen Sie, dass in jeder Gruppe $(G, \cdot)$ folgendes gilt:

- (i) aus $a \cdot x = b \cdot x$ folgt $a = b$.
- (ii) $(a^{-1})^{-1} = a$.
- (iii) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

Aufgabe 3.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- (i) $\mathbb{Z}$ zusammen mit der Subtraktion als Verknüpfung ist eine Gruppe.
- (ii) Wir betrachten $\mathbb{N}$ mit folgender Verknüpfung.

$$a * b := \text{ggT}(a, b),$$

für $a, b \in \mathbb{N}$, wobei ggT die Abbildung bezeichnet, die zwei Zahlen auf ihren größten gemeinsamen Teiler abbildet. Dann ist $(\mathbb{N}, *)$ eine Gruppe.

- (iii) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien A, B Untergruppen von G . Sei

$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Dann ist $A \cdot B$ eine Untergruppe von G .

Aufgabe 4.

Sei S eine beliebige Menge. Sei $\mathcal{P}(S)$ die Menge aller Teilmengen von S (auch *Potenzmenge* von S genannt). Mit welchen der folgenden Verknüpfungen ist $\mathcal{P}(S)$ eine Gruppe?

- (i) $(A, B) \mapsto A \cup B$, für $A, B \in \mathcal{P}(S)$.
- (ii) $(A, B) \mapsto A \cap B$, für $A, B \in \mathcal{P}(S)$.
- (iii) $A \Delta B := (A \cup B) - (A \cap B)$, für $A, B \in \mathcal{P}(S)$. Dabei ist $X - Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$.

Begründen Sie ihre Antworten.

[Hinweis: Vielleicht helfen Ihnen *Venn-Diagramme*.]

[Weiter auf Seite 2.]

***-Aufgabe 5.**

Erinnern Sie sich zuerst, was die Vokabeln *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv* bedeuten. Es sei X eine nichtleere Menge und $M(X)$ die Menge aller Abbildungen $X \rightarrow X$. Weiter sei $f \in M(X)$. Zeigen Sie:

- (i) f ist genau dann injektiv, wenn es $a \in M(X)$ gibt mit $a \circ f = \text{id}_X$.
- (ii) f ist genau dann surjektiv, wenn es $b \in M(X)$ gibt mit $f \circ b = \text{id}_X$.
- (iii) f ist genau dann bijektiv, wenn es $c \in M(X)$ gibt mit $c \circ f = \text{id}_X = f \circ c$.

[Hinweis: Betrachten Sie $a \circ f \circ b$.]